

考えてみよう

サイコロを 60 回投げたところ、1 の目が 15 回出た。このサイコロは 1 の目が出やすくなるように細工されていると言えるだろうか？

有意水準 5% で仮説検定をする。

帰無仮説 H_0 : サイコロは公平である。 $p = \frac{1}{6}$

対立仮説 H_1 : サイコロは 1 の目が出やすい。

二項分布で直接確率を計算しようとすると、15 回以上 1 の目ができる確率を全部合算したものが、有意水準以下のめったに起こらないことかどうかを考えることになる。

しかし、15 回以上の確率を全て合算することは計算が大変になる。

$$\begin{aligned} P(X \geq 15) &= P(X = 15) + P(X = 16) + \cdots + P(X = 60) \\ &= {}_{60}C_{15} \left(\frac{1}{6}\right)^{15} \left(\frac{5}{6}\right)^{45} + {}_{60}C_{16} \left(\frac{1}{6}\right)^{16} \left(\frac{5}{6}\right)^{44} \\ &\quad + \cdots + {}_{60}C_{60} \left(\frac{1}{6}\right)^{60} \end{aligned}$$

このようなケースでは、二項分布を正規分布で近似する。

二項分布の平均と分散・標準偏差

X が二項分布 $B(n, p)$ に従うとき、 $q = 1 - p$ として

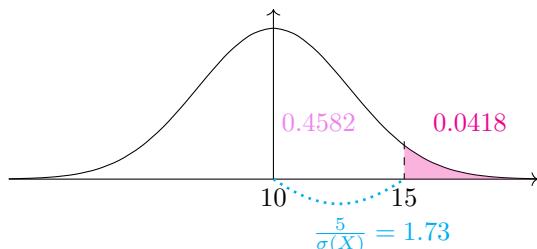
$$E(X) = np$$

$$V(X) = npq, \quad \sigma(X) = \sqrt{npq}$$

したがって、

$$E(X) = \mu = np = 60 \times \frac{1}{6} = 10$$

$$\sigma(X) = \sqrt{60 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} \approx 2.887$$

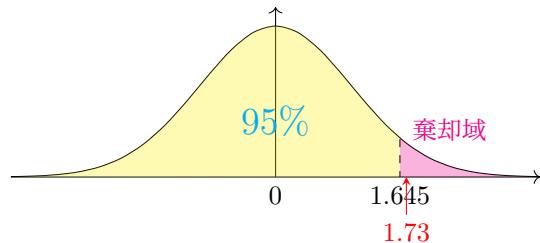


これにより、 $X = 15$ 以上の確率 4.18% は有意水準 5% よりも小さく、非常に稀な事が発生しているということになる。帰無仮説 H_0 は棄却され、このサイコロは 1 の目が出やすいということになる。

このように正規分布を元にして考えるとき、非常に稀なケースで、帰無仮説 H_0 は棄却される範囲のことを棄却域という。

片側で 95% の場合、 $P(0 \leq Z \leq 1.645) = 0.45$ なので、

棄却域 : $1.645 < Z$



$X = 15$ を標準化した $Z = 1.73$ は、この棄却域に入っている。

正規分布で考える場合は、 Z の値が棄却域に入っているれば、 H_0 は棄却。棄却域に入っていないければ、 H_0 は棄却できないと考えれば良い。

仮説検定の 5 ステップ

Step 1: 仮説を立てる

帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 を設定する。

Step 2: 有意水準を決める

$\alpha = 0.05$ または $\alpha = 0.01$ を選ぶ。

臨界値はそれぞれ $Z = 1.645$ と $Z = 2.326$

Step 3: 検定統計量 Z 値を計算する

確率変数 X を標準化し Z 値を求める。

Step 4: 棄却域を決めて判定する

Z 値が臨界値を超えて棄却域に入るかどうか。

Step 5: 結論を述べる

「 H_0 を棄却する」または「 H_0 を棄却できない」と結論。

【注意】 この問題では、対立仮説 H_1 が「1 の目が出やすい」というものであったので、正規分布の右側 5% を棄却域としたが、「1 の目が出にくい」であれば左側 5% を棄却域としなければならない。

例 1

サイコロを 120 回投げたところ、1 の目が 30 回出了。有意水準 5% で、このサイコロは 1 の目が出やすく細工されていると言えるか。

例 2

サイコロを 80 回投げたところ、1 の目が 8 回しか出なかった。このサイコロは、1 の目が出にくく細工されていると言えるか？

問 1

サイコロを 150 回投げたところ、1 の目が 32 回出了。有意水準 5% で、このサイコロは 1 の目が出やすく細工されていると言えるか。

問 2

サイコロを 100 回投げたところ、1 の目が 10 回出了。有意水準 5% で、このサイコロは 1 の目が出にくく細工されていると言えるか。

$$z = -1.79 < -1.645 \quad (\text{棄却域に入る})$$

step 5：結論 帰無仮説は棄却される。

答：有意水準 5% で、このサイコロは 1 の目が出にくく細工されていると言える。