確率分布　Q2600 t 分布による信頼区間　　組　　番　名前

母標準偏差が得られない場合、**t 分布**を用いて、母平均の信頼区間を求めることができる。
比較のために、まずは、母分散が既知の場合について復習しておこう。

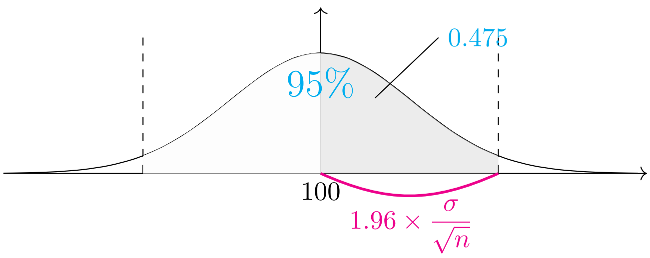
母分散が既知の場合（復習）

例 1　ある製品の重量は正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うことが分かっている（母標準偏差 $\sigma = 3.80$ g）。
5 個を測定したところ、標本平均 $\bar{x} = 100$ g だった。
母平均 m の 95% 信頼区間を求めよ。

【解答】

母標準偏差 $\sigma = 3.80$ が既知なので、標本平均は正規分布。
標本平均の標準偏差は、$\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{3.80}{\sqrt{5}} = 1.70$
95% 信頼区間は、$P(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95$ を使って：

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$



数値を代入：

$$100 - 1.96 \times 1.70 < m < 100 + 1.96 \times 1.70$$
$$100 - 3.33 < m < 100 + 3.33$$

答　$96.67 < m < 103.33$

母分散が不明の場合　【現実的な問題】

例 2　ある製品の重量を 5 個測定したところ、次のデータが得られた（単位：g）。
$\{98, 102, 100, 105, 95\}$
母集団は正規分布に従うと仮定して、母平均 m の 95% 信頼区間を求めよ。

Step 1：標本平均と標本標準偏差を計算

標本平均：

$$\bar{x} = \frac{98 + 102 + 100 + 105 + 95}{5} = \frac{500}{5} = 100$$

偏差の 2 乗和：

$$(98 - 100)^2 + (102 - 100)^2 + (100 - 100)^2$$
$$+ (105 - 100)^2 + (95 - 100)^2$$
$$= 4 + 4 + 0 + 25 + 25 = 58$$

標本標準偏差：

$$s = \sqrt{\frac{58}{5 - 1}} = \sqrt{\frac{58}{4}} = \sqrt{14.5} \approx 3.81$$

Step 2：t 分布を使う

母標準偏差 σ が不明なので、t 分布を使う。

$$t = \frac{\bar{X} - m}{s/\sqrt{n}}$$

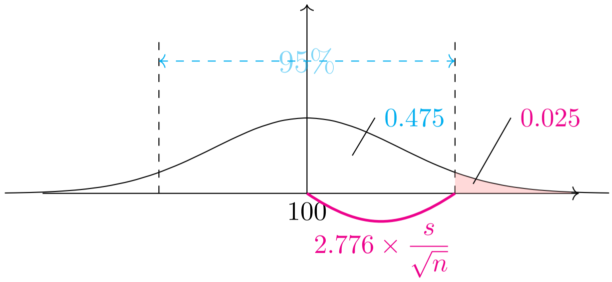
標本数 5　→　自由度：$n - 1 = 5 - 1 = 4$
95% 信頼区間なので、両端 5% ゆえ、$t_{0.025}$ を t 分布表から：

$$t_{0.025}(4) = 2.776$$

Step 3：信頼区間を計算

標本平均の標準偏差は、$\dfrac{s}{\sqrt{n}} = \dfrac{3.81}{\sqrt{5}} = 1.70$
95% 信頼区間は

$$\bar{x} - 2.776 \times \frac{s}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + 2.776 \times \frac{s}{\sqrt{n}}$$



数値を代入：

$$100 - 2.776 \times 1.70 < m < 100 + 2.776 \times 1.70$$
$$100 - 4.72 < m < 100 + 4.72$$

答　$95.28 < m < 104.72$

母平均の信頼区間（母分散不明）

標本サイズ n、標本平均 $\bar{x}$、標本標準偏差 s のとき、
母平均 m の 95% 信頼区間：

$$\bar{x} - t_{0.025}(n-1) \times \frac{s}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + t_{0.025}(n-1) \times \frac{s}{\sqrt{n}}$$

または：

$$\bar{x} \pm t_{0.025}(n-1) \times \frac{s}{\sqrt{n}}$$

計算手順：

(1) 標本平均 $\bar{x}$ を計算
(2) 標本標準偏差 s を計算
(3) 自由度 $(n-1)$ を求める
(4) t 分布表から $t_{0.025}(n-1)$ を読み取る
(5) 標準誤差 $\frac{s}{\sqrt{n}}$ を計算
(6) 信頼区間を計算

【例 1 と例 2 の比較】

	例 1（σ 既知）	例 2（σ 不明）
標本平均	100	100
標準偏差	$\sigma = 3.80$	$s = 3.81$
使う分布	$N(0,1)$	$t(4)$
臨界値	$Z = 1.96$	$t = 2.776$
標準誤差	$\frac{3.80}{\sqrt{5}} = 1.70$	$\frac{3.81}{\sqrt{5}} = 1.70$
誤差範囲	± 3.33	± 4.72
信頼区間	$(96.67, 103.33)$	$(95.28, 104.72)$
幅	6.66	9.44

【重要な気づき】

標準偏差がほぼ同じ（$\sigma = 3.80 \approx s = 3.81$）なのに、例 2（t 分布）の信頼区間の方が**広い**。

理由：

- 臨界値：$2.776 \div 1.96 = 1.42$（約 1.4 倍）
- 信頼区間の幅：$9.44 \div 6.66 = 1.42$（約 1.4 倍）

→ t 分布の臨界値が大きい分、信頼区間が広い

→ これは「σ が不明」という**不確実性**を反映している

例 3 ある工場で製造された部品の長さ（mm）を 6 個測定したところ、

$\{50.2, 49.8, 50.5, 49.9, 50.1, 50.3\}$

が得られた。母集団は正規分布に従うと仮定し、母平均の 95% 信頼区間を求めよ。（$t_{0.025}(5) = 2.571$）

Step 1：標本平均、標本標準偏差

$$\bar{x} = \frac{50.2 + 49.8 + 50.5 + 49.9 + 50.1 + 50.3}{6} \approx 50.13$$

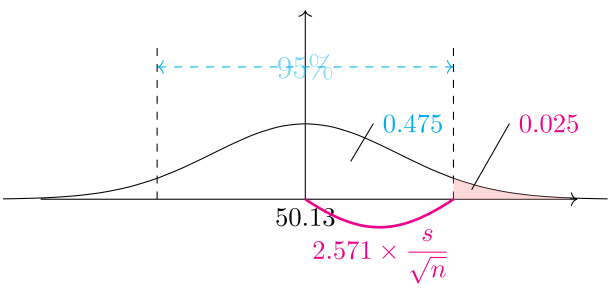
偏差の 2 乗和：

$$\begin{aligned}
&(50.2 - 50.13)^2 + (49.8 - 50.13)^2 + (50.5 - 50.13)^2 \\
&+ (49.9 - 50.13)^2 + (50.1 - 50.13)^2 + (50.3 - 50.13)^2 \\
&\approx 0.0049 + 0.1089 + 0.1369 \\
&\quad + 0.0529 + 0.0009 + 0.0289 \\
&\approx 0.3334
\end{aligned}$$

Step 2：信頼区間を計算

自由度：$n - 1 = 5$

t 分布表から：$t_{0.025}(5) = 2.571$



$$\begin{aligned}
\bar{x} \pm t_{0.025}(5) \times \frac{s}{\sqrt{n}} &= 50.13 \pm 2.571 \times \frac{0.258}{\sqrt{6}} \\
&= 50.13 \pm 2.571 \times 0.105 \\
&= 50.13 \pm 0.27
\end{aligned}$$

答　$49.86 < m < 50.40$

まとめ

	母分散既知	**母分散不明**
標準化した統計量	$\frac{\bar{X}-m}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\frac{\bar{X}-m}{s/\sqrt{n}}$
従う分布	$N(0,1)$	$t(n-1)$
95% 臨界値	1.96	$t_{0.025}(n-1)$
95% 信頼区間	$\bar{x} \pm 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{x} \pm t_{0.025}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$
信頼区間の幅	狭い	広い
実用性	非現実的	**実用的**

問 1 ある商品の価格を 7 店舗で調査したところ、次のデータが得られた（単位：円）。

$\{980, 1020, 950, 1050, 990, 1010, 1000\}$

母集団は正規分布に従うと仮定して、母平均の 95% 信頼区間を求めよ。（$t_{0.025}(6) = 2.447$）

問 2 ある学校で 10 人の生徒の身長を測定したところ、標本平均 $\bar{x} = 165.2$ cm、標本標準偏差 $s = 5.8$ cm だった。母集団は正規分布に従うと仮定して、母平均の 95% 信頼区間を求めよ。（$t_{0.025}(9) = 2.262$）

++*+*+*+*+*+*+ 【解答】*+*+*+*+*+*+*+*+

問 1 ある商品の価格を 7 店舗で調査したところ、次のデータが得られた（単位：円）。
$\{980, 1020, 950, 1050, 990, 1010, 1000\}$
母集団は正規分布に従うと仮定して、母平均の 95% 信頼区間を求めよ。($t_{0.025}(6) = 2.447$)

Step 1：標本平均、標本標準偏差

$$\bar{x} = \frac{980 + 1020 + 950 + 1050 + 990 + 1010 + 1000}{7} = 1000$$

偏差の 2 乗和：

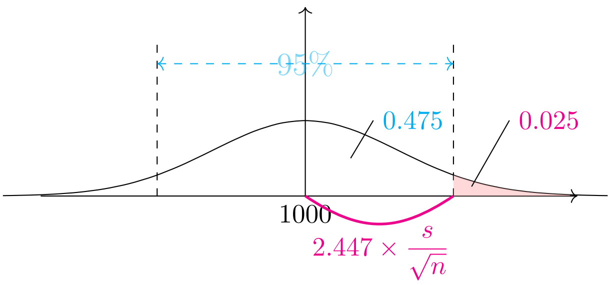
$$\begin{aligned}&(980-1000)^2 + (1020-1000)^2 + (950-1000)^2\\&+ (1050-1000)^2 + (990-1000)^2 + (1010-1000)^2\\&+ (1000-1000)^2\\&= 400 + 400 + 2500 + 2500 + 100 + 100 + 0\\&= 6000\end{aligned}$$

$$s = \sqrt{\frac{6000}{6}} = \sqrt{1000} \approx 31.62$$

Step 2：信頼区間を計算

自由度：$n - 1 = 6$

t 分布表から：$t_{0.025}(6) = 2.447$



$$1000 \pm 2.447 \times \frac{31.62}{\sqrt{7}} = 1000 \pm 2.447 \times 11.95$$

$$= 1000 \pm 29.2$$

答　$970.8 < m < 1029.2$

問 2 ある学校で 10 人の生徒の身長を測定したところ、標本平均 $\bar{x} = 165.2$ cm、標本標準偏差 $s = 5.8$ cm だった。母集団は正規分布に従うと仮定して、母平均の 95% 信頼区間を求めよ。($t_{0.025}(9) = 2.262$)

与えられた情報：

- 標本サイズ：$n = 10$
- 標本平均：$\bar{x} = 165.2$ cm
- 標本標準偏差：$s = 5.8$ cm
- 自由度：$n - 1 = 9$
- t 値：$t_{0.025}(9) = 2.262$

信頼区間：

$$165.2 \pm 2.262 \times \frac{5.8}{\sqrt{10}}$$

$$= 165.2 \pm 2.262 \times 1.834$$

$$= 165.2 \pm 4.15$$

答： $161.05 < m < 169.35$ (cm)

答　$161.05 < m < 169.35$