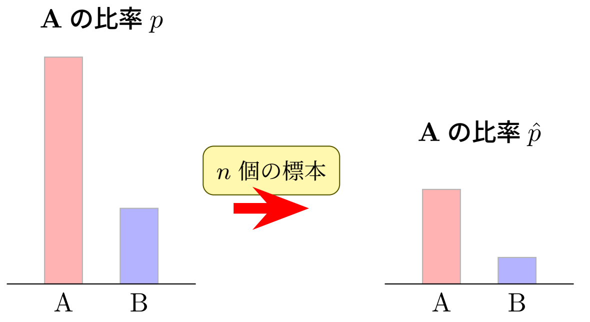
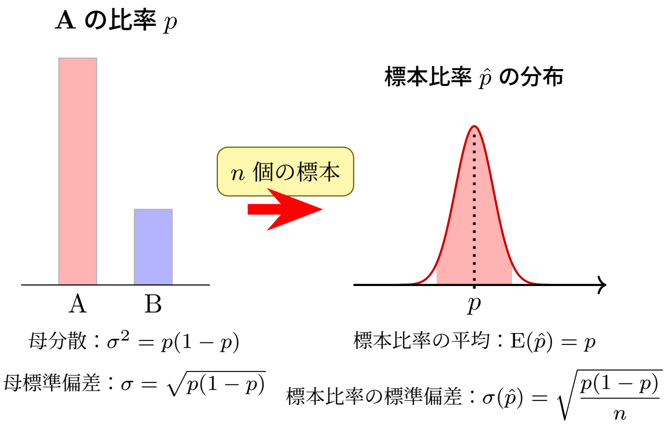
確率分布　Q2300 母比率の推定　　組　　番　名前

選挙で政権を支持しているかどうかを問うような場合、母集団は「A：支持」「B：不支持」の 2 つに分かれる。母集団の「A」の比率を求めるには、n 個の標本を取り出し、その標本における A の比率から、母集団の比率を推定する。



繰り返し標本をとっていくと仮定すると、標本比率 $\hat{p}$ は毎回違う値をとる。中心極限定理によると、母集団の分布がいかなるものであったとしても、ある程度の大きさの標本を取り出せば、それは正規分布になります。



標本平均から母平均を推定したときと同じように、標本比率 $\hat{p}$、標本比率の標準偏差 $\sigma(\hat{p})$、標本の大きさ n から母比率を推定できます。
ただし、実際の計算では母比率 p は未知であるため、$\sigma(\hat{p})$ の式中の p を標本比率 $\hat{p}$ で代用します。

$$\sigma(\hat{p}) \approx \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

この値を**標準誤差**と呼び、SE (Standard Error) と表します。

母比率 p の推定

標本の大きさ n、標本比率 $\hat{p}$ とするとき、標準誤差を $SE = \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ とすると、
信頼度 95% の信頼区間

$$\hat{p} - 1.96 \cdot SE \leqq p \leqq \hat{p} + 1.96 \cdot SE$$

信頼度 99% の信頼区間

$$\hat{p} - 2.58 \cdot SE \leqq p \leqq \hat{p} + 2.58 \cdot SE$$

例 1　ある県で、400 世帯を無作為抽出して、A という意見の賛否を調べたところ、250 世帯が賛成であった。全世帯における賛成の母比率 p を信頼度 95% で推定せよ。

答

問 1　ある県で、800 世帯を無作為抽出して、A という意見の賛否を調べたところ、500 世帯が賛成であった。全世帯における賛成の母比率 p を信頼度 95% で推定せよ。

答

++*+*+*+*+*+*+ **【解答】** *+*+*+*+*+*+*+*+

例 1 ある県で、400 世帯を無作為抽出して、A という意見の賛否を調べたところ、250 世帯が賛成であった。全世帯における賛成の母比率 p を信頼度 95% で推定せよ。

$n = 400, \quad \hat{p} = \dfrac{250}{400} = 0.625$ であるので、

$$SE = \sqrt{\frac{0.625(1-0.625)}{400}} = 0.0242$$

95% の信頼区間は

$$0.625 - 1.96 \cdot 0.0242 \leqq p \leqq 0.625 + 1.96 \cdot 0.0242$$

$$0.578 \leqq p \leqq 0.672$$

答 57.8% から 67.2% の間

問 1 ある県で、800 世帯を無作為抽出して、A という意見の賛否を調べたところ、500 世帯が賛成であった。全世帯における賛成の母比率 p を信頼度 95% で推定せよ。

$n = 800, \quad \hat{p} = \dfrac{500}{800} = 0.625$ であるので、

$$SE = \sqrt{\frac{0.625(1-0.625)}{800}} = 0.0171$$

95% の信頼区間は

$$0.625 - 1.96 \cdot 0.0171 \leqq p \leqq 0.625 + 1.96 \cdot 0.0171$$

$$0.591 \leqq p \leqq 0.659$$

答 59.1% から 65.9% の間

[参考]

標本サイズが 400 → 800 と 2 倍になり、信頼区間は：

400 世帯：67.2 − 57.8 = 9.4%

800 世帯：65.9 − 59.1 = 6.8%

標本サイズが 2 倍になると信頼区間は $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0.71$ 倍

信頼区間を小さくして、母平均の値を絞り込みたいときには、標本の数を増やすのが唯一の方法である。