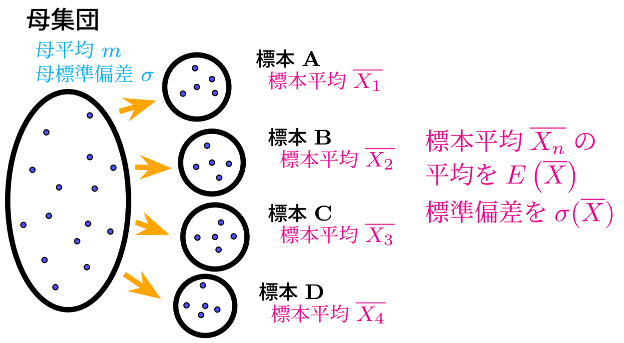
確率分布　Q2000 標本平均の分布　　組　　番　名前

母平均 m、母標準偏差 s の母集団から、いくつかの標本を取り出し標本平均 $\overline{X_n}$ を求める。中心極限定理によると標本平均は母平均 m を中心とする正規分布となるはずである。$\overline{X_n}$ の標準偏差はどのような値になるだろうか。



標本平均

母平均 m、母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき

$$E\left(\overline{X}\right) = m$$

$$\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

証明の前提となる公式

(1) $Y = aX + b$ のとき、
$E(Y) = aE(X) + b$　(確率変数の一次変換)
$V(Y) = a^2V(X)$

(2) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$　(和の平均)

(3) X と Y が独立であるとき、
$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$　(和の分散)

[証明]

母平均を m、母標準偏差を σ とする。
母集団から 1 個の標本 X を選んだとき、

$$E(X) = m, \qquad \sigma(X) = \sigma$$

n 個の大きさの標本平均を $\overline{X}$ とする。

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots X_n)$$

$$\begin{aligned} E(\overline{X}) &= E\left(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots X_n)\right) \\ &= \frac{1}{n}E\left(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots X_n\right) \\ &= \frac{1}{n}\{E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + \cdots + E(X_n)\} \\ &= \frac{1}{n}\cdot n\,m = m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(\overline{X}) &= V\left(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots X_n)\right) \\ &= \frac{1}{n^2}V\left(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots X_n\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\{V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + \cdots + V(X_n)\} \\ &= \frac{1}{n^2}\cdot n\,\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \qquad \text{だから、} \sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

例 1　ある高校の期末テストの数学の平均点は 65 点、標準偏差が 16 点であった。無作為抽出により 36 人の生徒の点数の標本平均 $\overline{X}$ を求める。この標本平均 $\overline{X}$ はどのような分布となるか、平均と標準偏差を求めよ。

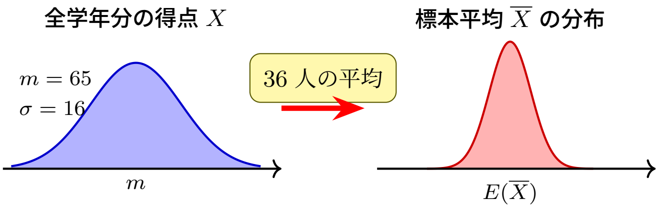
答　$E(\overline{X}) =$　　　$\sigma(\overline{X}) =$

問 1　ある高校の期末テストの数学の平均点は 55 点、標準偏差が 15 点であった。無作為抽出により 25 人の生徒の点数の標本平均 $\overline{X}$ を求める。この標本平均 $\overline{X}$ はどのような分布となるか、平均と標準偏差を求めよ。

答　$E(\overline{X}) =$　　　$\sigma(\overline{X}) =$

++*+*+*+*+*+*+ **【解答】** *+*+*+*+*+*+*+*+

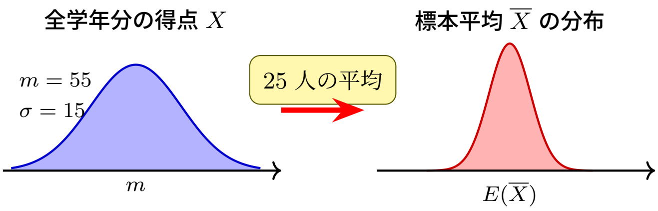
例 1 ある高校の期末テストの数学の平均点は 65 点、標準偏差が 16 点であった。無作為抽出により 36 人の生徒の点数の標本平均 $\overline{X}$ を求める。この標本平均 $\overline{X}$ はどのような分布となるか、平均と標準偏差を求めよ。



$$E(\overline{X}) = 65, \quad \sigma(\overline{X}) = \frac{16}{\sqrt{36}} = 2.7$$

答 $E(\overline{X}) = 65, \quad \sigma(\overline{X}) = 2.7$

問 1 ある高校の期末テストの数学の平均点は 55 点、標準偏差が 15 点であった。無作為抽出により 25 人の生徒の点数の標本平均 $\overline{X}$ を求める。この標本平均 $\overline{X}$ はどのような分布となるか、平均と標準偏差を求めよ。



$$E(\overline{X}) = 55, \quad \sigma(\overline{X}) = \frac{15}{\sqrt{25}} = 3$$

答 $E(\overline{X}) = 55, \quad \sigma(\overline{X}) = 3$