確率変数の和の平均

X と Y が独立であるかどうかに関わらず、

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

確率変数の積の平均

X, Y が独立のとき、

$$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$$

↓

確率変数の和の分散

X, Y が独立のとき、

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$

復習

(1) $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$　(2 乗の平均 − 平均の 2 乗)

(2) $Y=aX+b$ のとき、

　$E(Y)=aE(X)+b$　(確率変数の一次変換)

(3) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$　(確率変数の和の平均)

(4) X と Y が独立のとき、

　$E(XY)=E(X)E(Y)$　(確率変数の積の平均)

証明

$V(X+Y)=E\{(X+Y)^2\}-\{E(X+Y)\}^2$

$\boxed{V(X)=E(X^2)-E(X)^2 \quad \text{(2 乗の平均 − 平均の 2 乗)}}$

$=E(X^2+2XY+Y^2)-\{E(X)+E(Y)\}^2$

$\boxed{E(X+Y)=E(X)+E(Y) \quad \text{(確率変数の和の平均)}}$

$=E(X^2)+E(2XY)+E(Y^2)$

$\quad -\{E(X)^2+2E(X)E(Y)+E(Y)^2\}$

$\boxed{E(X+Y)=E(X)+E(Y) \quad \text{(確率変数の和の平均)}}$

$=E(X^2)+2E(X)E(Y)+E(Y^2)$

$\quad -\{E(X)^2+2E(X)E(Y)+E(Y)^2\}$

$Y=aX+b$ のとき、
$E(Y)=aE(X)+b$　(確率変数の一次変換)
$E(2XY)=2E(XY)$

X と Y が独立のとき、
$E(XY)=E(X)E(Y)$　(確率変数の積の平均)

$=\{E(X^2)-E(X)^2\}+\{E(Y^2)-E(Y)^2\}$

$=V(X)+V(Y)$

$\boxed{V(X)=E(X^2)-E(X)^2 \quad \text{(2 乗の平均 − 平均の 2 乗)}}$

例 1　サイコロを次の回数投げるとき、1 の目が出る回数 X の平均と分散を求めよ。

(1) 1 回
(2) 2 回
(3) 3 回

	⚀	⚁〜⚅
X		
$P(X)$		

	⚀	⚁〜⚅
X^2		
$P(X^2)$		

(1) 1 回

答　$E(X)=$　　，$V(X)=$

(2) 2 回

答　$E(X)=$　　，$V(X)=$

(3) 3 回

答　$E(X)=$　　，$V(X)=$

問 1　硬貨を次の枚数投げるとき、表のでる枚数の期待値と分散を求めよ。

(1) 1 枚
(2) 2 枚
(3) 3 枚

	表	裏
X		
$P(X)$		

	表	裏
X^2		
$P(X^2)$		

(1) 1 枚

答　$E(X)=$　　，$V(X)=$

(2) 2 枚

答　$E(X)=$　　，$V(X)=$

(3) 3 枚

答　$E(X)=$　　，$V(X)=$

++*+*+*+*+*+*+*+ **【解答】** *+*+*+*+*+*+*+*+*+

例 1　サイコロを次の回数投げるとき、1 の目が出る回数 X の平均と分散を求めよ。

(1)　1 回

(2)　2 回

(3)　3 回

	⚀	⚁〜⚅
X	1	0
$P(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

	⚀	⚁〜⚅
X^2	1	0
$P(X^2)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

(1)　1 回

$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$　　$E(X^2) = 1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{6} - (\frac{1}{6})^2 = \frac{5}{36}$

答　$E(X) = \frac{1}{6}$，　$V(X) = \frac{5}{36}$

(2)　2 回

1 回目を X_1、2 回目を X_2 とすると、X_1 と X_2 は独立。

$X = X_1 + X_2$

$E(X) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

$V(X) = V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) = \frac{5}{36} + \frac{5}{36} = \frac{5}{18}$

答　$E(X) = \frac{1}{3}$，　$V(X) = \frac{5}{18}$

(3)　3 回

1 回目を X_1、2 回目を X_2、3 回目を X_3、それぞれ独立。

$X = X_1 + X_2 + X_3$

$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

$V(X) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = 3 \times \frac{5}{36} = \frac{5}{12}$

答　$E(X) = \frac{1}{2}$，　$V(X) = \frac{5}{12}$

問 1　硬貨を次の枚数投げるとき、表のでる枚数の期待値と分散を求めよ。

(1)　1 枚

(2)　2 枚

(3)　3 枚

	表	裏
X	1	0
$P(X)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

	表	裏
X^2	1	0
$P(X^2)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(1)　1 枚

$E(X) = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$　　$E(X^2) = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

答　$E(X) = \frac{1}{2}$，　$V(X) = \frac{1}{4}$

(2)　2 枚

1 枚目を X_1、2 枚目を X_2 とすると、X_1 と X_2 は独立。

$X = X_1 + X_2$

$E(X) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$V(X) = V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

答　$E(X) = 1$，　$V(X) = \frac{1}{2}$

(3)　3 枚

1 枚目を X_1、2 枚目を X_2、3 枚目を X_3、それぞれ独立。

$X = X_1 + X_2 + X_3$

$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$V(X) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

答　$E(X) = \frac{3}{2}$，　$V(X) = \frac{3}{4}$