

独立している2つの試行

両方やつたらいくら貰えると期待できるか？

| | | |
|--------|---|---|
| サイコロ |  |  |
| X | 3000円 | 0円 |
| $P(X)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{5}{6}$ |

$$E(X) = 3000 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{5}{6} = 500$$

| | | |
|--------|---|---|
| 硬貨投げ |  |  |
| Y | 1000円 | 100円 |
| $P(Y)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

$$E(Y) = 1000 \times \frac{1}{2} + 100 \times \frac{1}{2} = 550$$

両方やつたら期待値はいくらになるか？

| | | | | |
|------------|---|---|---|---|
| サイコロ |  |  |  |  |
| + 硬貨投げ |  |  |  |  |
| $X + Y$ | 4000円 | 3100円 | 1000円 | 100円 |
| $P(X + Y)$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{5}{12}$ | $\frac{5}{12}$ |

$$E(X + Y)$$

$$\begin{aligned} &= 4000 \times \frac{1}{12} + 3100 \times \frac{1}{12} + 1000 \times \frac{5}{12} + 100 \times \frac{5}{12} \\ &= \frac{4000 + 3100 + 5000 + 500}{12} \\ &= \frac{12600}{12} \\ &= 1050 \end{aligned}$$

$$E(X + Y)$$

$$\begin{aligned} &= 4000 \times \frac{1}{12} + 3100 \times \frac{1}{12} + 1000 \times \frac{5}{12} + 100 \times \frac{5}{12} \\ &= (3000 + 1000) \cdot \frac{1}{12} + (3000 + 100) \cdot \frac{1}{12} \\ &\quad + (0 + 1000) \cdot \frac{5}{12} + (0 + 100) \cdot \frac{5}{12} \\ &= 3000 \cdot \frac{1}{12} + 1000 \cdot \frac{1}{12} + 3000 \cdot \frac{1}{12} + 100 \cdot \frac{1}{12} \\ &\quad + 0 \cdot \frac{5}{12} + 1000 \cdot \frac{5}{12} + 0 \cdot \frac{5}{12} + 100 \cdot \frac{5}{12} \\ &= 3000 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{5}{6} + 1000 \cdot \frac{1}{2} + 100 \cdot \frac{1}{2} \\ &= E(X) + E(Y) \end{aligned}$$

確率変数の和の平均

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

3つ以上の確率変数についても成り立つ。

連動している2つの試行

合計いくら貰えると期待できるか？

表に1000円または20円、裏に500円または10円と書いてあるカードが7枚ある。表の枚数と裏の枚数は次のようにになっている。表と裏の関連についてはどのようにになっているかは分からぬ。

(表)

| | | | | | | |
|-------|-------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1000円 | 1000円 | 20円 | 20円 | 20円 | 20円 | 20円 |
|-------|-------|-----|-----|-----|-----|-----|

(裏)

| | | | | | | |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 500円 | 10円 | 10円 | 10円 | 10円 | 10円 | 10円 |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

このカードから1枚引くとき、表の金額 X と裏の金額 Y の確率分布と平均は次のようになる。

| | | | | | |
|--------|---------------|---------------|--------|---------------|---------------|
| X | 1000円 | 20円 | Y | 500円 | 10円 |
| $P(X)$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{5}{7}$ | $P(Y)$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{6}{7}$ |

$$E(X) = 1000 \cdot \frac{2}{7} + 20 \cdot \frac{5}{7} = 300$$

$$E(Y) = 500 \cdot \frac{1}{7} + 10 \cdot \frac{6}{7} = 80$$

両方やつたら期待値はいくらになるか？

| | | | | |
|------------|-------|-------|-------|-------|
| $X + Y$ | 1500 | 1010 | 520 | 30 |
| $P(X + Y)$ | p_1 | p_2 | p_3 | p_4 |

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= \frac{2}{7} & p_3 + p_4 &= \frac{5}{7} \\ p_1 + p_3 &= \frac{1}{7} & p_2 + p_4 &= \frac{6}{7} \end{aligned}$$

$$E(X + Y) = 1500p_1 + 1010p_2 + 520p_3 + 30p_4$$

$$= (1000+500)p_1 + (1000+10)p_2 + (20+500)p_3 + (20+10)p_4$$

$$= 1000(p_1 + p_2) + 20(p_3 + p_4) + 500(p_1 + p_3) + 10(p_2 + p_4)$$

$$= 1000 \cdot \frac{2}{7} + 20 \cdot \frac{5}{7} + 500 \cdot \frac{1}{7} + 10 \cdot \frac{6}{7}$$

$$= E(X) + E(Y)$$

確率変数の和の平均

 X と Y が独立であるかどうかにか関わらず、

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

3つ以上の確率変数についても成り立つ。

例 1 白黒 2 個のサイコロを投げるとき、それぞれのサイコロの出る目を X, Y とする。出る目の和 $X + Y$ の平均を求めよ。

例 1 白黒 2 個のサイコロを投げるとき、それぞれのサイコロの出る目を X, Y とする。出る目の和 $X + Y$ の平均を求めよ。

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|----|----|----|---|
| + | ■ | □ | ▢ | ▢ | ▢ | ▢ | ▢ |
| ■ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| □ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | |
| ▢ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
| ▢ | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| ▢ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | |
| ▢ | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | |

$$E(X) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot \frac{1}{6} = 3.5$$

| | | | | | | |
|--------|---|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| Y | ■ | □ | ■□ | ■□□ | ■□□□ | ■□□□□ |
| $P(Y)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |
| $E(Y)$ | $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot \frac{1}{6}$ | | | | | |

$$E(Y) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot \frac{1}{6} = 3.5$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 3.5 + 3.5 = \underline{7}$$

| | |
|---|----------------|
| 答 | $E(X + Y) = 7$ |
|---|----------------|

問 1 1 から 5 まで番号が書かれた 5 枚のカードがある。この中から 1 枚ひく。奇数が出れば 100 円もらえる。そして、5 枚のうちのいずれか 1 枚には星印がつけられており、このカードならば、500 円もらえる。このとき、もらえる金額の期待値を求めよ。

奇数が出て 100 円貰える確率変数を X 、星印が出て 500 円貰える確率変数を Y とする。

問1 1から5まで番号が書かれた5枚の

問 1 1から5まで番号が書かれた5枚のカードがある。この中から1枚ひく。奇数が出れば100円もらえる。そして、5枚のうちのいずれか1枚には星印がつけられており、このカードならば、500円もらえる。このとき、もらえる金額の期待値を求めよ。

奇数が出て 100 円貰える確率変数を X 、星印が出て 500 円貰える確率変数を Y とする。

| | | | | | |
|--------|---------------|---------------|--------|---------------|---------------|
| X | 100 円 | 0 円 | Y | 500 円 | 0 円 |
| $P(X)$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $P(Y)$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{4}{5}$ |

$$E(X) = 100 \cdot \frac{3}{5} = 60 \quad E(Y) = 500 \cdot \frac{1}{5} = 100$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 60 + 100 = 160$$

答 $E(X + Y)$

$$\boxed{\text{答}} \quad E(X + Y) =$$