確率変数 X の平均・分散

平均：$E(X)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_kp_k$

分散：$V(X)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\{x_k-E(X)\}^2p_k$

確率変数 X が、a, b を定数として、

$$Y=aX+b \quad\to\quad y_k=ax_k+b$$

と一次変換されたとき、Y の平均は次のようになる。

$$E(Y)=aE(X)+b$$

分散 $V(Y)$ と標準偏差 $\sigma(Y)$ はどのようになるだろうか？

$$\begin{aligned}V(Y)&=\sum_{k=1}^{n}\{y_k-E(Y)\}^2p_k\\&=\sum_{k=1}^{n}\{(ax_k+b)-(aE(X)+b)\}^2p_k\\&=\sum_{k=1}^{n}\{ax_k-aE(X)\}^2p_k\\&=a^2\sum_{k=1}^{n}(x_k-E(X))^2p_k\\&=a^2V(X)\end{aligned}$$

一次変換と平均・分散・標準偏差

$Y=aX+b$ と一次変換すると、

$$E(Y)=aE(X)+b$$

$$V(Y)=a^2V(X)$$

$$\sigma(Y)=|a|\sigma(X)$$

例 1　1 個のサイコロの出る目の数 X の平均と分散は、

$$E(X)=\frac{7}{2},\qquad V(X)=\frac{35}{12}$$

この確率変数 X を $Y=6X+2$ と変換したとき、$E(Y), V(Y), \sigma(Y)$ の値を求めよ。

答　$E(Y)=$　　$V(Y)=$　　$\sigma(Y)=$

問 1　3 枚の硬貨を投げたとき、表の出る枚数 X の平均と分散は、

$$E(X)=\frac{3}{2},\qquad V(X)=\frac{3}{4}$$

この確率変数 X を $Y=-10X+3$ と変換したとき、$E(Y), V(Y), \sigma(Y)$ の値を求めよ。

答　$E(Y)=$　　$V(Y)=$　　$\sigma(Y)=$

例 2　確率変数 X の平均は m、標準偏差は s である。$Z=\dfrac{X-m}{s}$ と変換したとき、Z の平均と標準偏差を求めよ。

答　$E(Z)=$　　$\sigma(Z)=$

問 2　確率変数 X の平均は m、標準偏差は s である。$Z=50+\dfrac{10(X-m)}{s}$ と変換したとき、Z の平均と標準偏差を求めよ。

答　$E(Z)=$　　$\sigma(Z)=$

++*+*+*+*+*+*+ **【解答】** *+*+*+*+*+*+*+*+

例 1　1 個のサイコロの出る目の数 X の平均と分散は、

$$E(X)=\frac{7}{2},\qquad V(X)=\frac{35}{12}$$

この確率変数 X を $Y=6X+2$ と変換したとき、$E(Y), V(Y), \sigma(Y)$ の値を求めよ。

$$\begin{aligned}E(Y)&=6E(X)+2\\&=6\cdot\frac{7}{2}+2\\&=23\end{aligned}\qquad\begin{aligned}V(Y)&=6^2V(X)\\&=36\cdot\frac{35}{12}\\&=105\end{aligned}$$

$$\sigma(Y)=\sqrt{105}$$

答　$E(Y)=23,\quad V(Y)=105,\quad \sigma(Y)=\sqrt{105}$

問 1　3 枚の硬貨を投げたとき、表の出る枚数 X の平均と分散は、

$$E(X)=\frac{3}{2},\qquad V(X)=\frac{3}{4}$$

この確率変数 X を $Y=-10X+3$ と変換したとき、$E(Y), V(Y), \sigma(Y)$ の値を求めよ。

$$\begin{aligned}E(Y)&=-10E(X)+3\\&=-10\cdot\frac{3}{2}+3\\&=-12\end{aligned}\qquad\begin{aligned}V(Y)&=(-10)^2V(X)\\&=100\cdot\frac{3}{4}\\&=75\end{aligned}$$

$$\sigma(Y)=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$$

答　$E(Y)=-12,\quad V(Y)=75,\quad \sigma(Y)=5\sqrt{3}$

例 2　確率変数 X の平均は m、標準偏差は s である。$Z=\dfrac{X-m}{s}$ と変換したとき、Z の平均と標準偏差を求めよ。

題意より、$E(X)=m,\quad \sigma(X)=s$ である。

変換式を $Z=\dfrac{1}{s}X-\dfrac{m}{s}$ と見る。

$$\begin{aligned}E(Z)&=\frac{1}{s}E(X)-\frac{m}{s}\\&=\frac{m}{s}-\frac{m}{s}\\&=0\end{aligned}\qquad\begin{aligned}\sigma(Z)&=\left|\frac{1}{s}\right|\sigma(X)\\&=\left|\frac{1}{s}\right|s\\&=1\end{aligned}$$

答　$E(Z)=0,\quad \sigma(Z)=1$

問 2　確率変数 X の平均は m、標準偏差は s である。$Z=50+\dfrac{10(X-m)}{s}$ と変換したとき、Z の平均と標準偏差を求めよ。

題意より、$E(X)=m,\quad \sigma(X)=s$ である。

変換式を $Z=\dfrac{10}{s}X+\left(50-\dfrac{10m}{s}\right)$ と見る。

$$\begin{aligned}E(Z)&=\frac{10}{s}E(X)+50-\frac{10m}{s}\\&=\frac{10m}{s}+50-\frac{10m}{s}\\&=50\end{aligned}\qquad\begin{aligned}\sigma(Z)&=\left|\frac{10}{s}\right|\sigma(X)\\&=\left|\frac{10}{s}\right|s\\&=10\end{aligned}$$

答　$E(Z)=50,\quad \sigma(Z)=10$