

平均と分散の定義

X	x_1	x_2	\cdots	x_n
p	p_1	p_2	\cdots	p_n

$$\text{(平均)} \quad E(X) = \sum_{k=1}^n x_k p_k \\ E(X) = m$$

偏差	$x_1 - m$	$x_2 - m$	\cdots	$x_n - m$
(偏差) 2	$(x_1 - m)^2$	$(x_2 - m)^2$	\cdots	$(x_n - m)^2$
p	p_1	p_2	\cdots	p_n

$$\text{(分散)} \quad V(X) = \sum_{k=1}^n (x_k - m)^2 p_k$$

$$\text{(標準偏差)} \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

分散のもうひとつの求め方

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{k=1}^n (x_k - m)^2 p_k \\ &= \sum_{k=1}^n (x_k^2 - 2mx_k + m^2) p_k \\ &= \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k - 2m \sum_{k=1}^n x_k p_k + m^2 \sum_{k=1}^n p_k \\ \text{ここで } \sum_{k=1}^n x_k p_k &= m, \quad \sum_{k=1}^n p_k = 1 \text{ だから} \\ &= \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k - 2m^2 + m^2 \\ &= \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k - m^2 \end{aligned}$$

分散の性質

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

参考 1 個のサイコロを投げるとき、出る目の数 X の平均、分散を求めよ。

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

X	1	2	3	4	5	6
偏差	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{3}{2}$	$+\frac{5}{2}$
(偏差) 2	$\frac{25}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{25}{4}$
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$V(X) = \frac{25}{24} + \frac{9}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{9}{24} + \frac{25}{24} = \frac{70}{24} = \frac{35}{12}$$

例 1

1 個のサイコロを投げるとき、出る目の数 X の平均、分散を求めよ。

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} = \frac{7}{2}$$

X	1	2	3	4	5	6
X^2						
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

問 1 3 枚の硬貨を同時に投げるとき、表の出る枚数 X について、平均、分散を求めよ。

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$E(X) = \frac{0}{8} + \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3}{2}$$

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

問 2 番号 1, 2, 3, 6, 7 と書かれたカードがそれぞれ以下の表の枚数だけ入っている箱から 1 枚取り出す。カードの番号 X の平均 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ。

番号	1	2	3	6	7	計
枚数	2	1	2	2	2	9

X	1	2	3	6	7
P	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$

$$E(X) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{6}{9} + \frac{12}{9} + \frac{14}{9} = \frac{36}{9} = 4$$

X^2					
P	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$

例 1 1 個のサイコロを投げるとき、出る目の数 X の平均、分散を求めよ。

$$E(X) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} = \frac{7}{2}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{9}{6} + \frac{16}{6} + \frac{25}{6} + \frac{36}{6} = \frac{91}{6}$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182}{12} - \frac{147}{12} = \frac{35}{12}$$

問 1 3枚の硬貨を同時に投げるとき、表の出る枚数 X について、平均、分散を求めよ。

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$E(X) = \frac{0}{8} + \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3}{2}$$

X	0	1	2	3
X^2	0	1	4	9
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$E(X^2) = \frac{0}{8} + \frac{3}{8} + \frac{12}{8} + \frac{9}{8} = 3$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= 3 - \frac{9}{4} = \frac{12}{4} - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

問 2 番号 1, 2, 3, 6, 7 と書かれたカードがそれぞれ以下の表の枚数だけ入っている箱から 1 枚取り出す。カードの番号 X の平均 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ。

番号	1	2	3	6	7	計
枚数	2	1	2	2	2	9

X	1	2	3	6	7
P	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$

$$E(X) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{6}{9} + \frac{12}{9} + \frac{14}{9} = \frac{36}{9} = 4$$

X^2	1	4	9	36	49
P	$\frac{2}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{2}{\alpha}$	$\frac{2}{\alpha}$	$\frac{2}{\alpha}$

$$E(X^2) = \frac{2}{5} + \frac{4}{5} + \frac{18}{5} + \frac{72}{5} + \frac{98}{5} = \frac{194}{5}$$

$$\begin{aligned}V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\&= \frac{194}{9} - 4^2 = \frac{194}{9} - \frac{144}{9} = \frac{50}{9}\end{aligned}$$