

## 確率変数と期待値

確率変数  $x_k$  の確率が  $p_k$  であるとき、以下が成り立つ。

$$\sum_{k=1}^n p_k = 1, \quad E(X) = \sum_{k=1}^n x_k p_k$$

番号 1, 3, 10 と書かれたカードが、それぞれ 6 枚、3 枚、1 枚入った箱がある。カードを 1 枚取り出すとき、カードの番号  $X$  の平均  $E(X)$  は 2.5 であった。

$X$	1	3	10
$P(X)$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

カードで出た数字  $X$  を 1000 倍した金額  $Y$  が貰えるとすると、 $Y$  の期待値はいくらになるか。

$$Y = 1000X \quad E(Y) = 1000 \cdot E(X) = 2500$$

上記の金額  $Y$  に加えて、ゲームに参加した全員に 500 円ずつ貰えるとすると、合計金額  $Z$  はいくらになるか。

$$Z = Y + 400 \quad E(Z) = E(Y) + 500 = 3000$$

確率変数  $aX + b$  の平均

$a, b$  が定数で、 $Y = aX + b$  のとき、

$$E(Y) = aE(X) + b$$

確率変数  $X$  の確率分布が次のように与えられているとする。

$X$	$x_1$	$x_2$	$\cdots$	$x_n$
$p$	$p_1$	$p_2$	$\cdots$	$p_n$

このとき、 $Y = aX + b$  で決まる  $Y$  の平均を考えると、

$$y_1 = ax_1 + b, \quad y_2 = ax_2 + b, \dots, \quad y_n = ax_n + b$$

$Y$  の期待値  $E(Y)$  は次のように定義される。

$$E(Y) = y_1 p_1 + y_2 p_2 + \cdots + y_n p_n$$

$$= \sum_{k=1}^n y_k p_k$$

$$= \sum_{k=1}^n (ak_n + b)p_k$$

$$= a \sum_{k=1}^n x_k p_k + b \sum_{k=1}^n p_k$$

$$= aE(X) + b$$

## 例 1

サイコロを 1 回振って出た目を  $X$  とする。出た目の数字を 3 倍して 5 を引いた値が得点  $Y$  となるとき、得点の期待値  $E(Y)$  を求めよ。

答  $E(Y) =$

## 問 1

箱の中に 1 から 8 まで番号が書かれた 8 個のボールがある。この中から任意で 1 個取り出し、その番号に書かれた数字  $X$  を 20 倍して 10 足した金額が貰えるとき、貰える金額の期待値  $E(Y)$  を求めよ。

答  $E(Y) =$

**例 1** サイコロを 1 回振って出た目を X とする。出た目の数字を 3 倍して 5 を引いた値が得点 Y となるとき、得点の期待値  $E(Y)$  を求めよ。

サイコロの目の期待値

$$E(X) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot \frac{1}{6} = 3.5$$

$Y = 3X - 5$  であるから、

$$E(Y) = 3E(X) - 5 = 3 \times 3.5 - 5 = 5.5$$

$$\boxed{\text{答}} \quad E(Y) = 5.5$$

**問 1** 箱の中に 1 から 8 まで番号が書かれた 8 個のボールがある。この中から任意で 1 個取り出し、その番号に書かれた数字  $X$  を 20 倍して 10 足した金額が貰えるとき、貰える金額の期待値  $E(Y)$  を求めよ。

### ボールの番号の期待値

$$E(X) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) \cdot \frac{1}{8} = 4.5$$

$Y = 20X + 10$  であるから、

$$E(Y) = 20 \times 4.5 + 10 = 100$$

答  $E(Y) = 100$