確率分布

2800．片側検定と正規分布近似

サイコロを 60 回投げたところ、1 の目が 15 回出た。このサイコロは 1 の目が出やすくなるように細工されていると言えるだろうか？

math-support.jp

今回の学習目標

二項分布を正規分布で近似して確率計算

- 片側で 5%→片側検定

math-support.jp

考えてみよう

サイコロを 60 回投げたところ、1 の目が 15 回出た。
このサイコロは 1 の目が出やすくなるように細工されていると言えるだろうか？

考えてみよう

サイコロを 60 回投げたところ、1 の目が 15 回出た。
このサイコロは 1 の目が出やすくなるように細工されていると言えるだろうか？

有意水準 5% で**仮説検定**をする。

math-support.jp

考えてみよう

サイコロを 60 回投げたところ、1 の目が 15 回出た。
このサイコロは 1 の目が出やすくなるように細工されていると言えるだろうか？

有意水準 5% で**仮説検定**をする。

15 回以上 1 の目がでる確率を全部合算したものが、有意水準以下のめったに起こらないことかどうかを考えることになる。

考えてみよう

サイコロを 60 回投げたところ、1 の目が 15 回出た。
このサイコロは 1 の目が出やすくなるように細工されていると言えるだろうか？

有意水準 5% で**仮説検定**をする。

15 回以上 1 の目がでる確率を全部合算したものが、有意水準以下のめったに起こらないことかどうかを考えることになる。

→　15 回以上の確率を全て合算することは計算が大変だ。

math-support.jp

math-support.jp

このようなケースでは、正規分布で近似して確率を計算する。

math-support.jp

このようなケースでは、正規分布で近似して確率を計算する。

二項分布の平均と分散・標準偏差

X が二項分布 $B(n,p)$ に従うとき、$q=1-p$ として

$$E(X)=np$$

$$V(X)=npq,\qquad \sigma(X)=\sqrt{npq}$$

math-support.jp

このようなケースでは、正規分布で近似して確率を計算する。

$$E(X) = \mu = np = 60 \times \frac{1}{6} = 10$$

二項分布の平均と分散・標準偏差

X が二項分布 $B(n, p)$ に従うとき、$q = 1 - p$ として

$$E(X) = np$$

$$V(X) = npq, \qquad \sigma(X) = \sqrt{npq}$$

math-support.jp

このようなケースでは、正規分布で近似して確率を計算する。

$$E(X) = \mu = np = 60 \times \frac{1}{6} = 10$$

$$\sigma(X) = \sqrt{60 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} \approx 2.887$$

二項分布の平均と分散・標準偏差

X が二項分布 $B(n, p)$ に従うとき、$q = 1 - p$ として

$$E(X) = np$$

$$V(X) = npq, \qquad \sigma(X) = \sqrt{npq}$$

math-support.jp

このようなケースでは、正規分布で近似して確率を計算する。

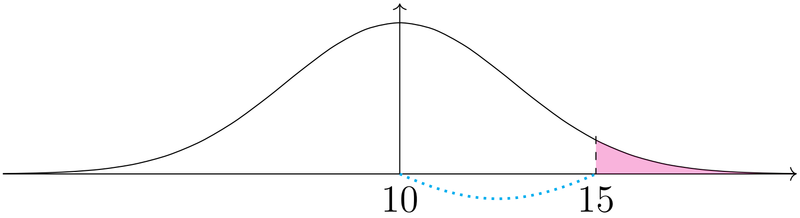
$$E(X) = \mu = np = 60 \times \frac{1}{6} = 10$$

$$\sigma(X) = \sqrt{60 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} \approx 2.887$$

このようなケースでは、正規分布で近似して確率を計算する。

$$E(X) = \mu = np = 60 \times \frac{1}{6} = 10$$

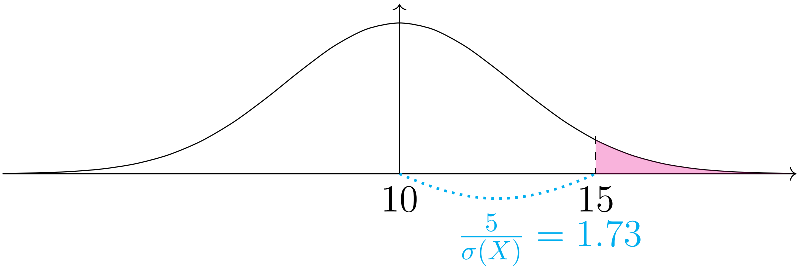
$$\sigma(X) = \sqrt{60 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} \approx 2.887$$



このようなケースでは、正規分布で近似して確率を計算する。

$$E(X) = \mu = np = 60 \times \frac{1}{6} = 10$$

$$\sigma(X) = \sqrt{60 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} \approx 2.887$$

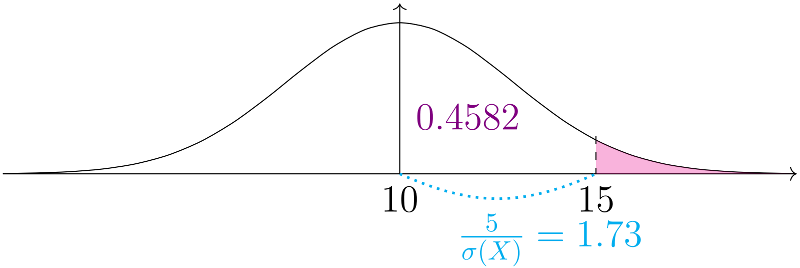


math-support.jp

このようなケースでは、正規分布で近似して確率を計算する。

$$E(X) = \mu = np = 60 \times \frac{1}{6} = 10$$

$$\sigma(X) = \sqrt{60 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} \approx 2.887$$

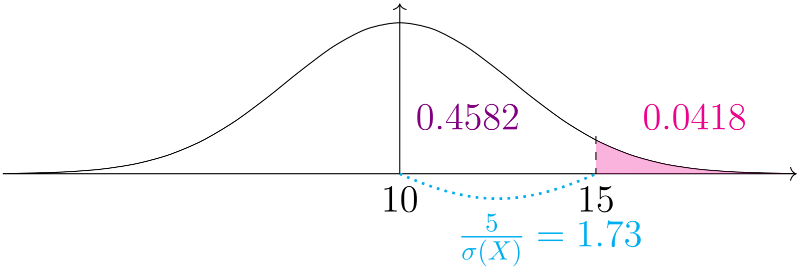


math-support.jp

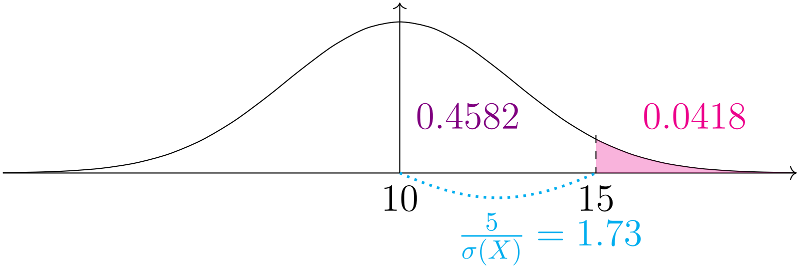
このようなケースでは、正規分布で近似して確率を計算する。

$$E(X) = \mu = np = 60 \times \frac{1}{6} = 10$$

$$\sigma(X) = \sqrt{60 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} \approx 2.887$$



math-support.jp



これにより、$X = 15$ 以上の確率 4.18% は**有意水準** 5% よりも小さく、非常に稀な事が発生しているということになる。
帰無仮説 H_0 は棄却され、このサイコロは 1 の目が出やすいということになる。

このように正規分布を元にして考えるとき、非常に稀なケースで、帰無仮説 H_0 は棄却される範囲のことを**棄却域**という。

このように正規分布を元にして考えるとき、非常に稀なケースで、帰無仮説 H_0 は棄却される範囲のことを**棄却域**という。

片側で 95%の場合、$P(0 \leqq Z \leqq 1.645) = 0.45$ なので、

math-support.jp

このように正規分布を元にして考えるとき、非常に稀なケースで、帰無仮説 H_0 は棄却される範囲のことを**棄却域**という。

片側で 95%の場合、$P(0 \leqq Z \leqq 1.645) = 0.45$ なので、

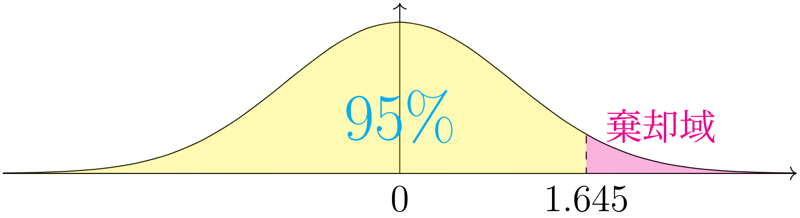
棄却域：$1.645 < Z$

math-support.jp

このように正規分布を元にして考えるとき、非常に稀なケースで、帰無仮説 H_0 は棄却される範囲のことを**棄却域**という。

片側で 95%の場合、$P(0 \leqq Z \leqq 1.645) = 0.45$ なので、

棄却域 :$1.645 < Z$

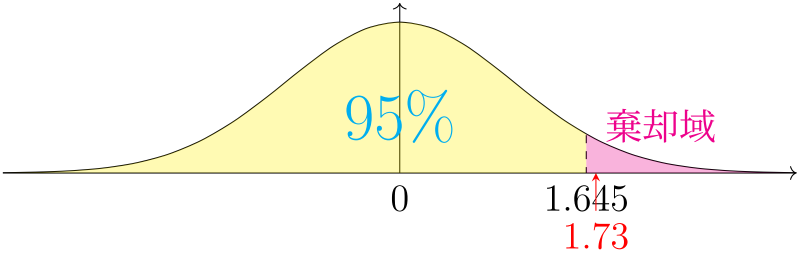


math-support.jp

このように正規分布を元にして考えるとき、非常に稀なケースで、帰無仮説 H_0 は棄却される範囲のことを**棄却域**という。

片側で 95%の場合、$P(0 \leqq Z \leqq 1.645) = 0.45$ なので、

棄却域：$1.645 < Z$

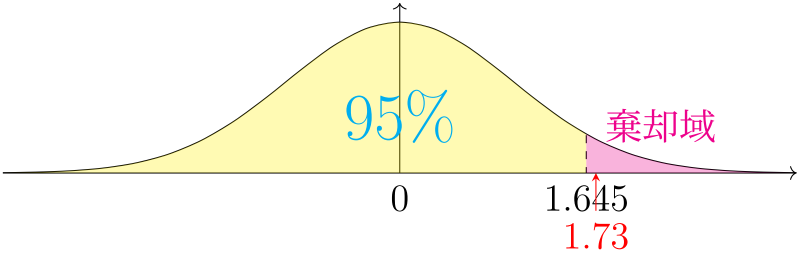


$X = 15$ を標準化した $Z = 1.73$ は、この**棄却域**に入っている。

このように正規分布を元にして考えるとき、非常に稀なケースで、帰無仮説 H_0 は棄却される範囲のことを**棄却域**という。

片側で 95%の場合、$P(0 \leqq Z \leqq 1.645) = 0.45$ なので、

棄却域 :$1.645 < Z$

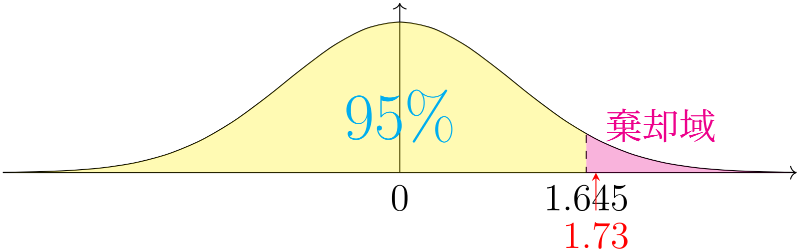


$X = 15$ を標準化した $Z = 1.73$ は、この**棄却域**に入っている。
正規分布で考える場合は、Z の値が**棄却域**に入っていれば、H_0 は棄却。

このように正規分布を元にして考えるとき、非常に稀なケースで、帰無仮説 H_0 は棄却される範囲のことを**棄却域**という。

片側で 95%の場合、$P(0 \leqq Z \leqq 1.645) = 0.45$ なので、

棄却域：$1.645 < Z$



$X = 15$ を標準化した $Z = 1.73$ は、この**棄却域**に入っている。
正規分布で考える場合は、Z の値が**棄却域**に入っていれば、H_0 は棄却。
棄却域に入っていなければ、H_0 は棄却できないと考えれば良い。

仮説検定の 5 ステップ

math-support.jp

仮説検定の 5 ステップ

Step 1：仮説を立てる

帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 を設定する。

math-support.jp

仮説検定の 5 ステップ

Step 1：仮説を立てる

帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 を設定する。

Step 2：有意水準を決める

$\alpha = 0.05$ または $\alpha = 0.01$ を選ぶ。
臨界値はそれぞれ $Z = 1.645$ と $Z = 2.326$

math-support.jp

仮説検定の 5 ステップ

Step 1：仮説を立てる

帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 を設定する。

Step 2：有意水準を決める

$\alpha = 0.05$ または $\alpha = 0.01$ を選ぶ。
臨界値はそれぞれ $Z = 1.645$ と $Z = 2.326$

Step 3：検定統計量 Z 値を計算する

確率変数 X を標準化し Z 値を求める。

math-support.jp

仮説検定の 5 ステップ

Step 1：仮説を立てる
帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 を設定する。

Step 2：有意水準を決める
$\alpha = 0.05$ または $\alpha = 0.01$ を選ぶ。
臨界値はそれぞれ $Z = 1.645$ と $Z = 2.326$

Step 3：検定統計量 Z 値を計算する
確率変数 X を標準化し Z 値を求める。

Step 4：棄却域を決めて判定する
Z 値が臨界値を超えて棄却域に入るかどうか。

math-support.jp

仮説検定の 5 ステップ

Step 1：仮説を立てる

帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 を設定する。

Step 2：有意水準を決める

$\alpha = 0.05$ または $\alpha = 0.01$ を選ぶ。
臨界値はそれぞれ $Z = 1.645$ と $Z = 2.326$

Step 3：検定統計量 Z 値を計算する

確率変数 X を標準化し Z 値を求める。

Step 4：棄却域を決めて判定する

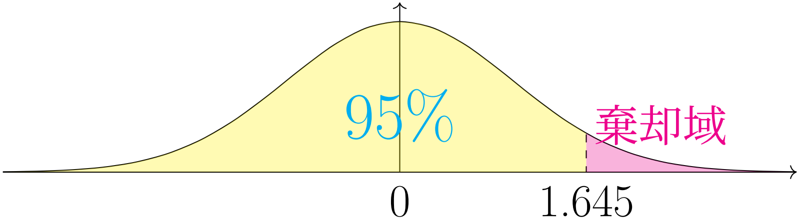
Z 値が臨界値を超えて棄却域に入るかどうか。

Step 5：結論を述べる

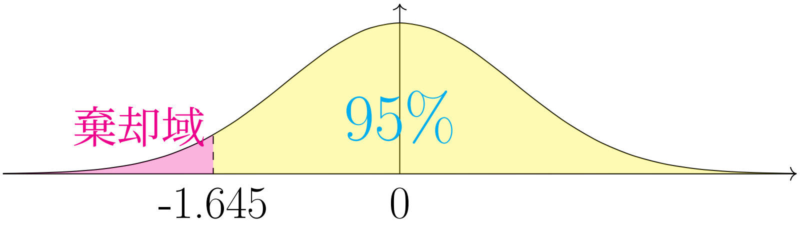
「H_0 を棄却する」または「H_0 を棄却できない」と結論。

math-support.jp

【注意】 この問題では、対立仮設 H_1 が**「1 の目が出やすい」**というものであったので、正規分布の右側 5% を棄却域としたが、



【注意】　この問題では、対立仮説 H_1 が「1 の目が出やすい」というものであったので、正規分布の右側 5% を棄却域としたが、**「1 の目が出にくい」**であれば左側 5% を棄却域としなければならない。



例 1　サイコロを 120 回投げたところ、1 の目が 30 回出た。有意水準 5%で、このサイコロは 1 の目が出やすく細工されていると言えるか。

math-support.jp

例 1　サイコロを 120 回投げたところ、1 の目が 30 回出た。有意水準 5%で、このサイコロは 1 の目が出やすく細工されていると言えるか。

step 1：仮説を立てる

H_0 : サイコロは公平である。　　H_1 :1 の目が出やすい。

例 1　サイコロを 120 回投げたところ、1 の目が 30 回出た。有意水準 5%で、このサイコロは 1 の目が出やすく細工されていると言えるか。

step 1：仮説を立てる

H_0 : サイコロは公平である。　　H_1 :1 の目が出やすい。

有意水準　$\alpha = 0.05$　$\rightarrow$ 臨界値は $z = 1.645$

例 1 サイコロを 120 回投げたところ、1 の目が 30 回出た。有意水準 5%で、このサイコロは 1 の目が出やすく細工されていると言えるか。

step 1：仮説を立てる

H_0 : サイコロは公平である。　H_1 :1 の目が出やすい。

有意水準　$\alpha = 0.05$　$\rightarrow$ 臨界値は $z = 1.645$

step 2：平均と標準偏差

$$\mu = 120 \times \frac{1}{6} = 20 \qquad \sigma = \sqrt{120 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{100}{6}} \approx 4.082$$

math-support.jp

例 1　サイコロを 120 回投げたところ、1 の目が 30 回出た。有意水準 5%で、このサイコロは 1 の目が出やすく細工されていると言えるか。

step 1：仮説を立てる

H_0 : サイコロは公平である。　　H_1 :1 の目が出やすい。

有意水準　$\alpha = 0.05$　$\rightarrow$ 臨界値は $z = 1.645$

step 2：平均と標準偏差

$$\mu = 120 \times \frac{1}{6} = 20 \qquad \sigma = \sqrt{120 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{100}{6}} \approx 4.082$$

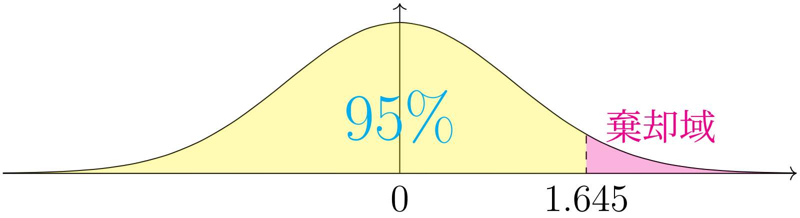
step 3：標準化

$$z = \frac{30 - 20}{4.082} \approx 2.45$$

math-support.jp

step 4：臨界値と比較

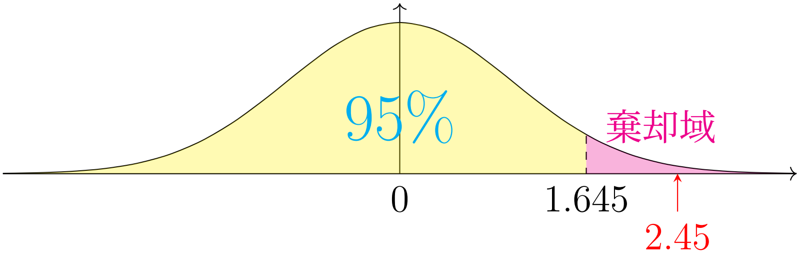
$$z = 2.45 > 1.645 \quad （棄却域に入る）$$



math-support.jp

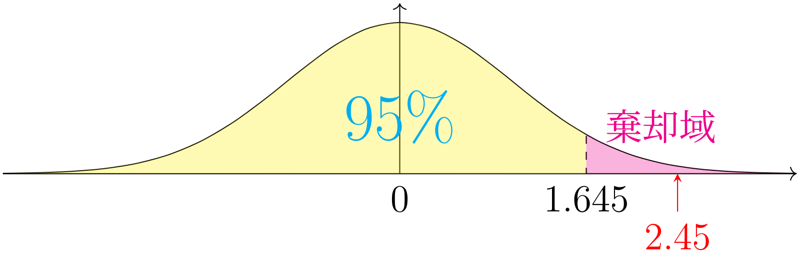
step 4：臨界値と比較

$$z = 2.45 > 1.645 \quad （棄却域に入る）$$



step 4：臨界値と比較

$$z = 2.45 > 1.645 \quad （棄却域に入る）$$

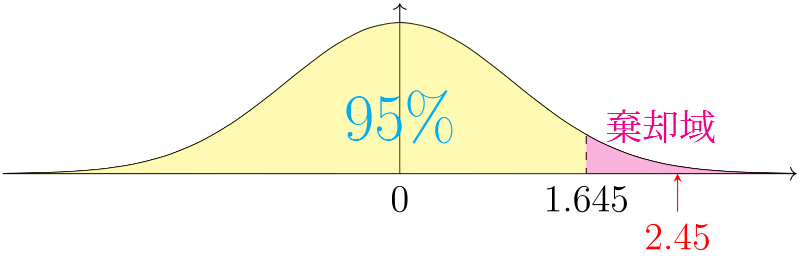


step 5：結論

帰無仮説を**棄却する**。

step 4：臨界値と比較

$$z = 2.45 > 1.645$$ （棄却域に入る）



step 5：結論

帰無仮説を**棄却する**。

答：有意水準 5%で、このサイコロは 1 の目が出やすく細工されていると言える。

ビデオを止めて問題を解いてみよう

問 1　サイコロを 150 回投げたところ、1 の目が 32 回出た。有意水準 5%で、このサイコロは 1 の目が出やすく細工されていると言えるか。

問 1 サイコロを 150 回投げたところ、1 の目が 32 回出た。有意水準 5%で、このサイコロは 1 の目が出やすく細工されていると言えるか。

問 1　サイコロを 150 回投げたところ、1 の目が 32 回出た。有意水準 5%で、このサイコロは 1 の目が出やすく細工されていると言えるか。

step 1：仮説を立てる

H_0 : サイコロは公平である。　　H_1 :1 の目が出やすい。

math-support.jp

問 1 サイコロを 150 回投げたところ、1 の目が 32 回出た。有意水準 5%で、このサイコロは 1 の目が出やすく細工されていると言えるか。

step 1：仮説を立てる

H_0 : サイコロは公平である。　　H_1 :1 の目が出やすい。

有意水準　$\alpha = 0.05$　$\rightarrow$ 臨界値は $z = 1.645$

問 1 サイコロを 150 回投げたところ、1 の目が 32 回出た。有意水準 5%で、このサイコロは 1 の目が出やすく細工されていると言えるか。

step 1：仮説を立てる

H_0 : サイコロは公平である。　H_1 :1 の目が出やすい。

有意水準　$\alpha = 0.05$　$\rightarrow$ 臨界値は $z = 1.645$

step 2：平均と標準偏差

$$\mu = 150 \times \frac{1}{6} \approx 25 \qquad \sigma = \sqrt{150 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} \approx 4.564$$

math-support.jp

問 1 サイコロを 150 回投げたところ、1 の目が 32 回出た。有意水準 5%で、このサイコロは 1 の目が出やすく細工されていると言えるか。

step 1：仮説を立てる

H_0 : サイコロは公平である。　H_1 :1 の目が出やすい。

有意水準　$\alpha = 0.05$　$\rightarrow$ 臨界値は $z = 1.645$

step 2：平均と標準偏差

$$\mu = 150 \times \frac{1}{6} \approx 25 \qquad \sigma = \sqrt{150 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} \approx 4.564$$

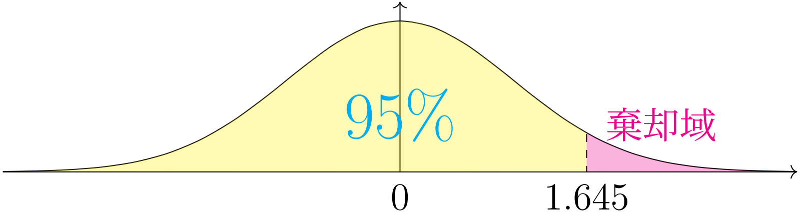
step 3：標準化

$$z = \frac{32 - 25}{4.564} \approx 1.53$$

math-support.jp

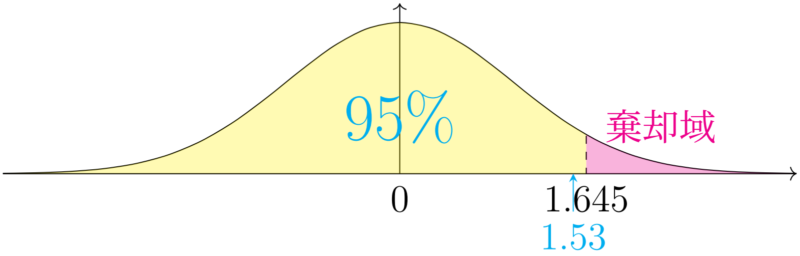
step 4：臨界値と比較

$$z = 1.53 < 1.645 \quad \text{（棄却域に入らない）}$$



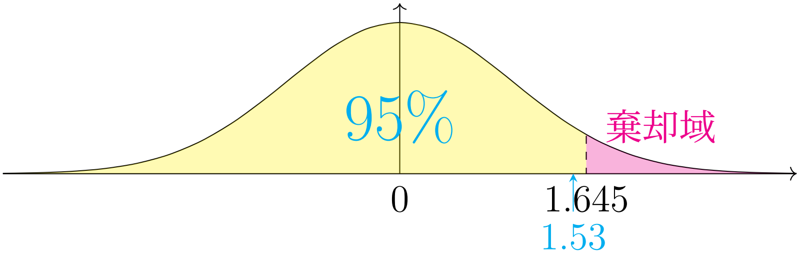
step 4：臨界値と比較

$$z = 1.53 < 1.645 \quad （棄却域に入らない）$$



step 4：臨界値と比較

$$z = 1.53 < 1.645 \quad （棄却域に入らない）$$



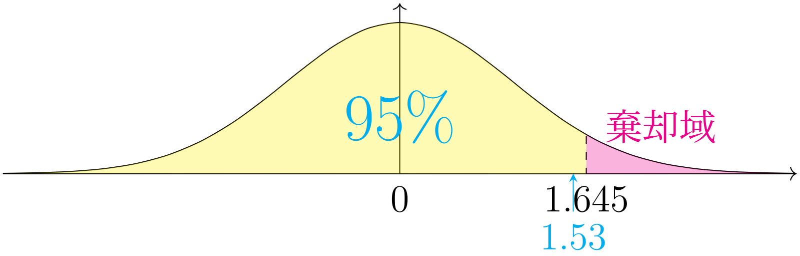
step 5：結論

帰無仮説は**棄却されない**。

math-support.jp

step 4：臨界値と比較

$z = 1.53 < 1.645$　（棄却域に入らない）



step 5：結論

帰無仮説は**棄却されない**。

答：有意水準 5%で、このサイコロは 1 の目が出やすく細工されているとは言えない。

例 2 サイコロを 80 回投げたところ、1 の目が 8 回しか出なかった。このサイコロは、1 の目が出にくく細工されていると言えるか？

math-support.jp

例 2　サイコロを 80 回投げたところ、1 の目が 8 回しか出なかった。このサイコロは、1 の目が出にくく細工されていると言えるか？

step 1：仮説を立てる

H_0 : サイコロは公平である。　　H_1 :1 の目が出にくい。

math-support.jp

例 2　サイコロを 80 回投げたところ、1 の目が 8 回しか出なかった。このサイコロは、1 の目が出にくく細工されていると言えるか？

step 1：仮説を立てる

H_0 : サイコロは公平である。　H_1 :1 の目が出にくい。

有意水準　$\alpha = 0.05$　$\rightarrow$ 臨界値は $z = -1.645$

math-support.jp

例 2　サイコロを 80 回投げたところ、1 の目が 8 回しか出なかった。このサイコロは、1 の目が出にくく細工されていると言えるか？

step 1：仮説を立てる

H_0 : サイコロは公平である。　H_1 :1 の目が出にくい。

有意水準　$\alpha = 0.05$　$\to$ 臨界値は $z = -1.645$

step 2：平均と標準偏差

$$\mu = 80 \times \frac{1}{6} \approx 13.33 \qquad \sigma = \sqrt{80 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} \approx 3.333$$

math-support.jp

例 2　サイコロを 80 回投げたところ、1 の目が 8 回しか出なかった。このサイコロは、1 の目が出にくく細工されていると言えるか？

step 1：仮説を立てる

H_0 : サイコロは公平である。　H_1 :1 の目が出にくい。

有意水準　$\alpha = 0.05$　$\rightarrow$ 臨界値は $z = -1.645$

step 2：平均と標準偏差

$$\mu = 80 \times \frac{1}{6} \approx 13.33 \qquad \sigma = \sqrt{80 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} \approx 3.333$$

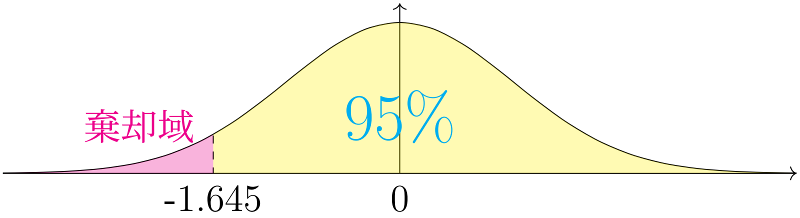
step 3：標準化

$$z = \frac{8 - 13.33}{3.333} \approx -1.60$$

math-support.jp

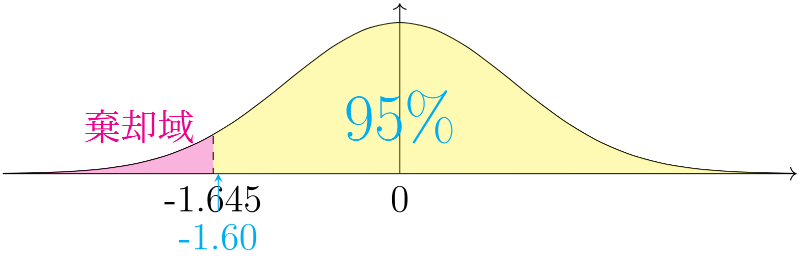
step 4：臨界値と比較

$$z = -1.60 > -1.645 \quad （棄却域に入らない）$$



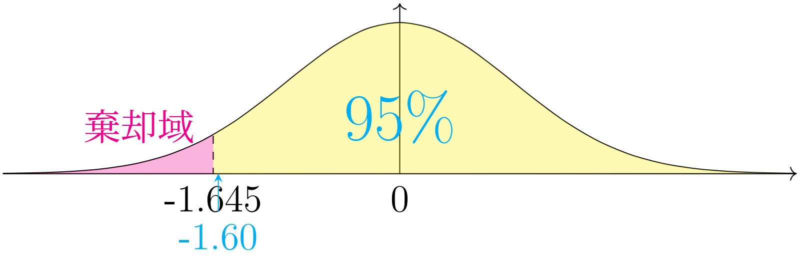
step 4：臨界値と比較

$$z = -1.60 > -1.645 \quad（棄却域に入らない）$$



step 4：臨界値と比較

$$z = -1.60 > -1.645 \quad （棄却域に入らない）$$

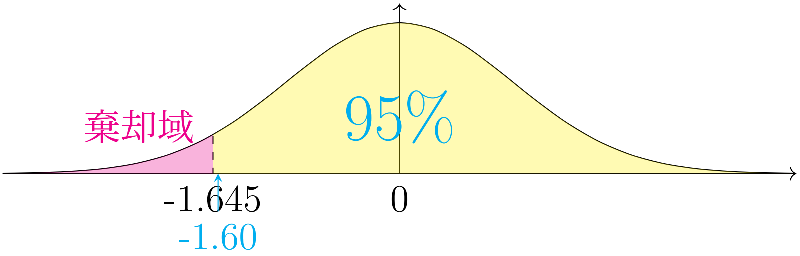


step 5：結論

帰無仮説は**棄却されない。**

step 4：臨界値と比較

$$z = -1.60 > -1.645 \quad （棄却域に入らない）$$



step 5：結論

帰無仮説は**棄却されない。**

答：有意水準 5%で、このサイコロは 1 の目が出にくく細工されているとは言えない。

ビデオを止めて問題を解いてみよう

問 2　サイコロを 100 回投げたところ、1 の目が 10 回出た。有意水準 5%で、このサイコロは 1 の目が出にくく細工されていると言えるか。

math-support.jp

問 2 サイコロを 100 回投げたところ、1 の目が 10 回出た。有意水準 5% で、このサイコロは 1 の目が出にくく細工されていると言えるか。

問 2 サイコロを 100 回投げたところ、1 の目が 10 回出た。有意水準 5%で、このサイコロは 1 の目が出にくく細工されていると言えるか。

step 1：仮説を立てる

H_0 : サイコロは公平である。　　H_1 :1 の目が出にくい。

問 2　サイコロを 100 回投げたところ、1 の目が 10 回出た。有意水準 5%で、このサイコロは 1 の目が出にくく細工されていると言えるか。

step 1：仮説を立てる

H_0 : サイコロは公平である。　　H_1 :1 の目が出にくい。

有意水準　$\alpha = 0.05$　$\rightarrow$ 臨界値は $z = -1.645$

math-support.jp

問 2　サイコロを 100 回投げたところ、1 の目が 10 回出た。有意水準 5%で、このサイコロは 1 の目が出にくく細工されていると言えるか。

step 1：仮説を立てる

H_0 : サイコロは公平である。　H_1 :1 の目が出にくい。

有意水準　$\alpha = 0.05$　$\rightarrow$ 臨界値は $z = -1.645$

step 2：平均と標準偏差

$$\mu = 100 \times \frac{1}{6} \approx 16.67 \qquad \sigma = \sqrt{100 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} \approx 3.727$$

math-support.jp

問 2 サイコロを 100 回投げたところ、1 の目が 10 回出た。有意水準 5%で、このサイコロは 1 の目が出にくく細工されていると言えるか。

step 1：仮説を立てる

H_0 : サイコロは公平である。　H_1 :1 の目が出にくい。

有意水準　$\alpha = 0.05$　$\rightarrow$ 臨界値は $z = -1.645$

step 2：平均と標準偏差

$$\mu = 100 \times \frac{1}{6} \approx 16.67 \qquad \sigma = \sqrt{100 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} \approx 3.727$$

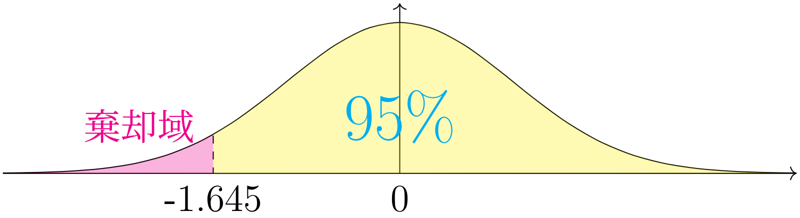
step 3：標準化

$$z = \frac{10 - 16.67}{3.727} \approx -1.79$$

math-support.jp

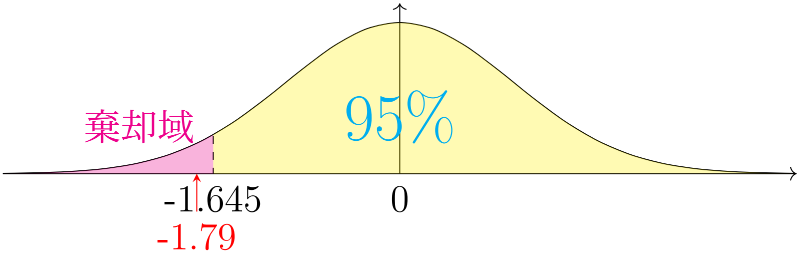
step 4：臨界値と比較

$$z = -1.79 < -1.645 \quad \text{（棄却域に入る）}$$



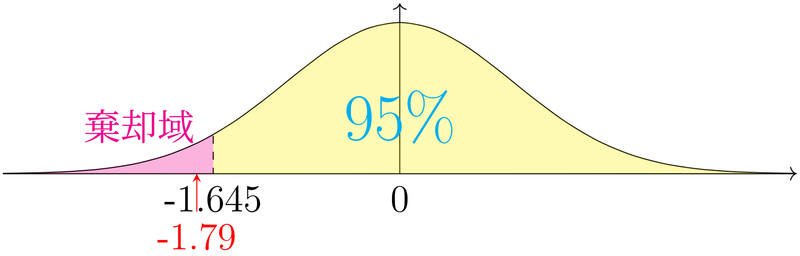
step 4：臨界値と比較

$$z = -1.79 < -1.645 \quad （棄却域に入る）$$



step 4：臨界値と比較

$$z = -1.79 < -1.645 \quad \text{（棄却域に入る）}$$

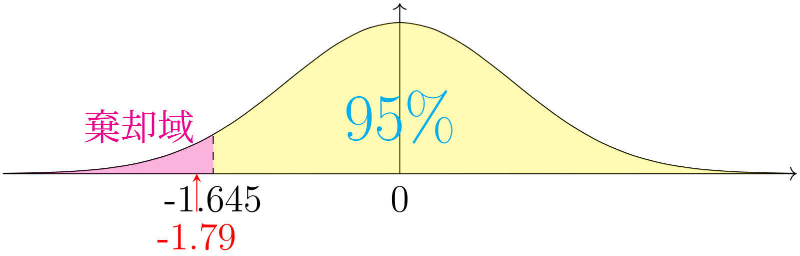


step 5：結論

帰無仮説は**棄却される**。

step 4：臨界値と比較

$$z = -1.79 < -1.645 \quad \text{（棄却域に入る）}$$



step 5：結論　　帰無仮説は**棄却される**。

答：有意水準 5%で、このサイコロは 1 の目が出にくく細工されていると言える。

今回の学習目標

二項分布を正規分布で近似して確率計算

- 片側で 5%→片側検定

math-support.jp