あるコイン を 10 回投げたところ、表が 8 回出た。このコインは表が出やすいといえるか。

今回の学習目標

仮説検定の枠組みの理解

- 「ある主張が正しいかどうか」を確率で判断

math-support.jp

これまで学んだ**推定**は、「母平均がどのくらいか」を信頼区間で示す方法だった。今回学ぶ**仮説検定**は、「ある主張が正しいかどうか」をデータから判断する方法である。

これまで学んだ**推定**は、「母平均がどのくらいか」を信頼区間で示す方法だった。今回学ぶ**仮説検定**は、「ある主張が正しいかどうか」をデータから判断する方法である。

【身近な例】

ゲームの先攻後攻をコイン投げで決めようとするあなたは友人から「このコインは表が出やすいイカサマコインだ」と言われた。実際に 10 回投げてみたところ、**8 回表**が出た。

表 表 表 表 表 表 表 表 裏 裏

math-support.jp

これまで学んだ**推定**は、「母平均がどのくらいか」を信頼区間で示す方法だった。今回学ぶ**仮説検定**は、「ある主張が正しいかどうか」をデータから判断する方法である。

【身近な例】
ゲームの先攻後攻をコイン投げで決めようとするあなたは友人から「このコインは表が出やすいイカサマコインだ」と言われた。実際に 10 回投げてみたところ、**8 回表**が出た。

表 表 表 表 表 表 表 表 裏 裏

問い：このコインがイカサマかどうかどう判断すれば?

math-support.jp

公平なコイン（$p=0.5$）で 10 回投げたとき、8 回以上表の確率：

$$P(X \geq 8) = {}_{10}C_8 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_9 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$= \frac{45+10+1}{1024} = \frac{56}{1024} \approx 0.055 = 5.5\%$$

math-support.jp

公平なコイン（$p=0.5$）で 10 回投げたとき、8 回以上表の確率：

$$P(X \geq 8) = {}_{10}C_8 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_9 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$= \frac{45+10+1}{1024} = \frac{56}{1024} \approx 0.055 = 5.5\%$$

→ 公平なコインでも、**約 5.5%の確率**で起こる

math-support.jp

公平なコイン（$p = 0.5$）で 10 回投げたとき、8 回以上表の確率：

$$P(X \geq 8) = {}_{10}C_8 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_9 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$= \frac{45 + 10 + 1}{1024} = \frac{56}{1024} \approx 0.055 = 5.5\%$$

→ 公平なコインでも、**約 5.5%の確率**で起こる

【判断】
この確率が「極めて小さい」と考えるなら、「公平なコインではない」と判断。

math-support.jp

公平なコイン（$p = 0.5$）で 10 回投げたとき、8 回以上表の確率：

$$P(X \geq 8) = {}_{10}C_8 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_9 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$= \frac{45 + 10 + 1}{1024} = \frac{56}{1024} \approx 0.055 = 5.5\%$$

$\rightarrow$ 公平なコインでも、**約 5.5%の確率**で起こる

【判断】

この確率が「極めて小さい」と考えるなら、「公平なコインではない」と判断。　「十分大きい」と考えるなら、「公平なコインかもしれない」と判断。

math-support.jp

公平なコイン（$p = 0.5$）で 10 回投げたとき、8 回以上表の確率：

$$P(X \geq 8) = {}_{10}C_8 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_9 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$= \frac{45 + 10 + 1}{1024} = \frac{56}{1024} \approx 0.055 = 5.5\%$$

→ 公平なコインでも、**約 5.5%の確率**で起こる

【判断】
この確率が「極めて小さい」と考えるなら、「公平なコインではない」と判断。　「十分大きい」と考えるなら、「公平なコインかもしれない」と判断。
→ この判断の基準を**有意水準**という。

math-support.jp

仮説検定の基本構造

math-support.jp

仮説検定の基本構造

1. 帰無仮説 H_0（きむ かせつ）

検定したい主張の「否定」。通常は「差がない」「変化がない」「効果がない」という仮説。　例：コインは公平である（$p = 0.5$）

仮説検定の基本構造

1. 帰無仮説 H_0（きむ かせつ）

検定したい主張の「否定」。通常は「差がない」「変化がない」「効果がない」という仮説。　例：コインは公平である（$p = 0.5$）

2. 対立仮説 H_1（たいりつ かせつ）

検定したい主張そのもの。「差がある」「変化がある」「効果がある」という仮説。　例：コインは表が出やすい（$p > 0.5$）

math-support.jp

仮説検定の基本構造

1. 帰無仮説 H_0（きむ かせつ）

検定したい主張の「否定」。通常は「差がない」「変化がない」「効果がない」という仮説。　例：コインは公平である（$p = 0.5$）

2. 対立仮説 H_1（たいりつ かせつ）

検定したい主張そのもの。「差がある」「変化がある」「効果がある」という仮説。　例：コインは表が出やすい（$p > 0.5$）

3. 有意水準 α（ゆうい すいじゅん）

「帰無仮説が正しいとしたとき、偶然では起こりにくい」と判断する確率の基準。

通常は $\alpha = 0.05$（5%）か、$\alpha = 0.01$（1%）を使う。

math-support.jp

仮説検定：「コインはイカサマか？」

math-support.jp

仮説検定：「コインはイカサマか？」

対立仮説「コインは表が出やすい」という問題指摘

math-support.jp

仮説検定：「コインはイカサマか？」

対立仮説「コインは表が出やすい」という問題指摘

帰無仮説「コインは公平である」　$p = 0.5$

math-support.jp

仮説検定：「コインはイカサマか？」

対立仮説「コインは表が出やすい」という問題指摘

帰無仮説「コインは公平である」　$p = 0.5$

確率計算：10 回中 8 回以上表がでる確率は 5.5%

math-support.jp

仮説検定：「コインはイカサマか？」

対立仮説「コインは表が出やすい」という問題指摘

帰無仮説「コインは公平である」　$p = 0.5$

確率計算：10 回中 8 回以上表がでる確率は 5.5%

有意水準：5%

math-support.jp

仮説検定：「コインはイカサマか？」

対立仮説「コインは表が出やすい」という問題指摘

帰無仮説「コインは公平である」　$p = 0.5$

確率計算：10 回中 8 回以上表がでる確率は 5.5%

有意水準：5%　→ 確率は有意水準より大きい

math-support.jp

仮説検定：「コインはイカサマか？」

対立仮説「コインは表が出やすい」という問題指摘

帰無仮説「コインは公平である」　$p = 0.5$

確率計算：10 回中 8 回以上表がでる確率は 5.5%

有意水準：5%　→ 確率は有意水準より大きい

帰無仮説「コインは公平である」は**棄却できない**

math-support.jp

仮説検定：「コインはイカサマか？」

対立仮説「コインは表が出やすい」という問題指摘

帰無仮説「コインは公平である」　$p = 0.5$

確率計算：10 回中 8 回以上表がでる確率は 5.5%

有意水準：5%　$\to$ 確率は有意水準より大きい

帰無仮説「コインは公平である」は**棄却できない**

結論「表が出やすい」とは言えない

math-support.jp

【検定の論理】

math-support.jp

【検定の論理】

(1) まず「帰無仮説 H_0 が正しい」と仮定する

math-support.jp

【検定の論理】

(1) まず「帰無仮説 H_0 が正しい」と仮定する

(2) その仮定の下で、観測されたデータが起こる確率を計算

【検定の論理】

(1) まず「帰無仮説 H_0 が正しい」と仮定する

(2) その仮定の下で、観測されたデータが起こる確率を計算

(3) その確率が有意水準より小さければ、H_0 を**棄却**する

math-support.jp

【検定の論理】

(1) まず「帰無仮説 H_0 が正しい」と仮定する

(2) その仮定の下で、観測されたデータが起こる確率を計算

(3) その確率が有意水準より小さければ、H_0 を**棄却**する

(4) その確率が有意水準以上であれば、H_0 を**棄却できない**

math-support.jp

【検定の論理】

(1) まず「帰無仮説 H_0 が正しい」と仮定する

(2) その仮定の下で、観測されたデータが起こる確率を計算

(3) その確率が有意水準より小さければ、H_0 を**棄却**する

(4) その確率が有意水準以上であれば、H_0 を**棄却できない**

【重要な注意】「H_0 を棄却できない」$\neq$「H_0 が正しい」

math-support.jp

【検定の論理】

(1) まず「帰無仮説 H_0 が正しい」と仮定する

(2) その仮定の下で、観測されたデータが起こる確率を計算

(3) その確率が有意水準より小さければ、H_0 を**棄却**する

(4) その確率が有意水準以上であれば、H_0 を**棄却できない**

【重要な注意】「H_0 を棄却できない」$\neq$「H_0 が正しい」
データからは「H_0 が間違っている」とは言えなかっただけで、
「H_0 が正しい」ことを証明したわけではない。

math-support.jp

仮説検定の 5 ステップ

仮説検定の 5 ステップ

Step 1：仮説を立てる

帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 を設定する。

math-support.jp

仮説検定の 5 ステップ

Step 1：仮説を立てる

帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 を設定する。

Step 2：有意水準を決める

$\alpha = 0.05$ または $\alpha = 0.01$ を選ぶ。

math-support.jp

仮説検定の 5 ステップ

Step 1：仮説を立てる

帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 を設定する。

Step 2：有意水準を決める

$\alpha = 0.05$ または $\alpha = 0.01$ を選ぶ。

Step 3：検定統計量を計算する

データから検定に使う統計量を計算する。

math-support.jp

仮説検定の 5 ステップ

Step 1：仮説を立てる

帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 を設定する。

Step 2：有意水準を決める

$\alpha = 0.05$ または $\alpha = 0.01$ を選ぶ。

Step 3：検定統計量を計算する

データから検定に使う統計量を計算する。

Step 4：棄却かどうかを判定する

計算した統計量が棄却域に入るかどうかを判定する。

math-support.jp

仮説検定の 5 ステップ

Step 1：仮説を立てる

帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 を設定する。

Step 2：有意水準を決める

$\alpha = 0.05$ または $\alpha = 0.01$ を選ぶ。

Step 3：検定統計量を計算する

データから検定に使う統計量を計算する。

Step 4：棄却かどうかを判定する

計算した統計量が棄却域に入るかどうかを判定する。

Step 5：結論を述べる

「H_0 を棄却する」または「H_0 を棄却できない」と結論づける。

math-support.jp

例 1 あるコインを 10 回投げたところ、表が 9 回出た。このコインは表が出やすいといえるか。有意水準 5%で検定せよ。

math-support.jp

例 1　あるコインを 10 回投げたところ、表が 9 回出た。このコインは表が出やすいといえるか。有意水準 5%で検定せよ。

Step 1：仮説を立てる

H_0：コインは公平である（表が出る確率は 0.5）
H_1：表が出やすい（表が出る確率は 0.5 より大きい）

例 1　あるコインを 10 回投げたところ、表が 9 回出た。このコインは表が出やすいといえるか。有意水準 5%で検定せよ。

Step 1：仮説を立てる

H_0：コインは公平である（表が出る確率は 0.5）
H_1：表が出やすい（表が出る確率は 0.5 より大きい）

Step 2：有意水準

$\alpha = 0.05$（5%）

math-support.jp

例 1　あるコインを 10 回投げたところ、表が 9 回出た。このコインは表が出やすいといえるか。有意水準 5%で検定せよ。

Step 1：仮説を立てる

H_0：コインは公平である（表が出る確率は 0.5）
H_1：表が出やすい（表が出る確率は 0.5 より大きい）

Step 2：有意水準

$\alpha = 0.05$（5%）

Step 3：検定統計量

H_0 が正しいとすると、10 回中表が出る回数 X は二項分布：$B(10, 0.5)$

math-support.jp

例 1　あるコインを 10 回投げたところ、表が 9 回出た。このコインは表が出やすいといえるか。有意水準 5%で検定せよ。

Step 1：仮説を立てる

H_0：コインは公平である（表が出る確率は 0.5）
H_1：表が出やすい（表が出る確率は 0.5 より大きい）

Step 2：有意水準

$\alpha = 0.05$（5%）

Step 3：検定統計量

H_0 が正しいとすると、10 回中表が出る回数 X は二項分布：$B(10, 0.5)$
表が 9 回以上出る確率は、

$$P(X \geq 9) = {}_{10}C_9 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

例 1　あるコインを 10 回投げたところ、表が 9 回出た。このコインは表が出やすいといえるか。有意水準 5%で検定せよ。

Step 1：仮説を立てる

H_0：コインは公平である（表が出る確率は 0.5）
H_1：表が出やすい（表が出る確率は 0.5 より大きい）

Step 2：有意水準

$\alpha = 0.05$（5%）

Step 3：検定統計量

H_0 が正しいとすると、10 回中表が出る回数 X は二項分布：$B(10, 0.5)$
表が 9 回以上出る確率は、

$$P(X \geq 9) = {}_{10}C_9 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$
$$= \frac{10+1}{1024} = \frac{11}{1024} \approx 0.0107 = 1.07\%$$

Step 4：判定

確率 1.07% は有意水準 5% より小さい。

$$1.07\% < 5\%$$

math-support.jp

Step 4：判定

確率 1.07% は有意水準 5% より小さい。

$$1.07\% < 5\%$$

したがって、H_0 を**棄却する**。

math-support.jp

Step 4：判定

確率 1.07% は有意水準 5% より小さい。

$$1.07\% < 5\%$$

したがって、H_0 を**棄却する**。

Step 5：結論

有意水準 5%で、表が出やすいといえる。

答　表が出やすいといえる

math-support.jp

Step 4：判定
確率 1.07% は有意水準 5% より小さい。

$$1.07\% < 5\%$$

したがって、H_0 を**棄却する**。

Step 5：結論
有意水準 5%で、表が出やすいといえる。

$\boxed{答}$ 表が出やすいといえる

【解釈】
10 回中 9 回表が出るのは、公平なコインではめったに起こらない（約 1%）。
したがって、「このコインは公平」という仮説を疑うのが妥当である。

math-support.jp

ビデオを止めて問題を解いてみよう

問 1　あるコインを 11 回投げたところ、表が 8 回出た。このコインは表が出やすいといえるか。有意水準 5%で検定せよ。

math-support.jp

問 1　あるコインを 11 回投げたところ、表が 8 回出た。このコインは表が出やすいといえるか。有意水準 5%で検定せよ。

math-support.jp

問 1　あるコインを 11 回投げたところ、表が 8 回出た。このコインは表が出やすいといえるか。有意水準 5%で検定せよ。

Step 1：仮説

H_0：コインは公平（$p = 0.5$）　　H_1：表が出やすい（$p > 0.5$）

math-support.jp

問 1　あるコインを 11 回投げたところ、表が 8 回出た。このコインは表が出やすいといえるか。有意水準 5%で検定せよ。

Step 1：仮説

H_0：コインは公平（$p = 0.5$）　　H_1：表が出やすい（$p > 0.5$）

Step 2：有意水準　$\alpha = 0.05$

math-support.jp

問 1 あるコインを 11 回投げたところ、表が 8 回出た。このコインは表が出やすいといえるか。有意水準 5%で検定せよ。

Step 1：仮説

H_0：コインは公平（$p = 0.5$）　　H_1：表が出やすい（$p > 0.5$）

Step 2：有意水準　$\alpha = 0.05$

Step 3：検定統計量

表が出る回数 X は二項分布 $B(11, 0.5)$

問 1 あるコインを 11 回投げたところ、表が 8 回出た。このコインは表が出やすいといえるか。有意水準 5%で検定せよ。

Step 1：仮説

H_0：コインは公平（$p = 0.5$）

H_1：表が出やすい（$p > 0.5$）

Step 2：有意水準　$\alpha = 0.05$

Step 3：検定統計量

表が出る回数 X は二項分布 $B(11, 0.5)$

表が 8 回以上出る確率：

$$P(X \geq 8) = {}_{11}C_8 \left(\frac{1}{2}\right)^{11} + {}_{11}C_9 \left(\frac{1}{2}\right)^{11} + {}_{11}C_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{11} + {}_{11}C_{11} \left(\frac{1}{2}\right)^{11}$$

math-support.jp

問 1 あるコインを 11 回投げたところ、表が 8 回出た。このコインは表が出やすいといえるか。有意水準 5%で検定せよ。

Step 1：仮説

H_0：コインは公平（$p = 0.5$） H_1：表が出やすい（$p > 0.5$）

Step 2：有意水準 $\alpha = 0.05$

Step 3：検定統計量

表が出る回数 X は二項分布 $B(11, 0.5)$

表が 8 回以上出る確率：

$$\begin{aligned} P(X \geq 8) &= {}_{11}C_8 \left(\frac{1}{2}\right)^{11} + {}_{11}C_9 \left(\frac{1}{2}\right)^{11} + {}_{11}C_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{11} + {}_{11}C_{11} \left(\frac{1}{2}\right)^{11} \\ &= \frac{165 + 55 + 11 + 1}{2048} \end{aligned}$$

math-support.jp

問 1 あるコインを 11 回投げたところ、表が 8 回出た。このコインは表が出やすいといえるか。有意水準 5%で検定せよ。

Step 1：仮説

H_0：コインは公平（$p = 0.5$）　　H_1：表が出やすい（$p > 0.5$）

Step 2：有意水準　$\alpha = 0.05$

Step 3：検定統計量

表が出る回数 X は二項分布 $B(11, 0.5)$

表が 8 回以上出る確率：

$$P(X \geq 8) = {}_{11}C_8\left(\frac{1}{2}\right)^{11} + {}_{11}C_9\left(\frac{1}{2}\right)^{11} + {}_{11}C_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{11} + {}_{11}C_{11}\left(\frac{1}{2}\right)^{11}$$

$$= \frac{165 + 55 + 11 + 1}{2048}$$

$$= \frac{232}{2048} \approx 0.113 = 11.3\%$$

math-support.jp

Step 4：判定

確率 11.3% は有意水準 5% 以上：

$$11.3\% > 5\%$$

したがって、H_0 を棄却できない。

math-support.jp

Step 4：判定
確率 11.3% は有意水準 5% 以上：

$$11.3\% > 5\%$$

したがって、H_0 を棄却できない。

Step 5：結論
表が出やすいとは言えない。

答　表が出やすいとは言えない

math-support.jp

Step 4：判定

確率 11.3% は有意水準 5% 以上：

$$11.3\% > 5\%$$

したがって、H_0 を棄却できない。

Step 5：結論

表が出やすいとは言えない。

答　表が出やすいとは言えない

【解釈】

11 回中 8 回表が出るのは、公平なコインでも約 11%の確率で起こりうる。この程度なら偶然のばらつきの範囲内と考えられる。

math-support.jp

今回の学習目標

仮説検定の枠組みの理解

- 「ある主張が正しいかどうか」をデータから判断

math-support.jp