

標本平均は母標準偏差が関係する正規分布

母標準偏差が分からない時

→ 標本標準偏差（分母 $n - 1$ ）に補正

→ それでも母標準偏差の前後ずれる

→ t 分布

標本平均は母標準偏差が関係する正規分布

標本平均は母標準偏差が関係する正規分布

母標準偏差が分からない時

→ 標本標準偏差（分母 $n - 1$ ）に補正

標本平均は母標準偏差が関係する**正規分布**

母標準偏差が分からない時

→ 標本標準偏差（分母 $n - 1$ ）に補正

→ それでも母標準偏差の前後ずれる

標本平均は母標準偏差が関係する**正規分布**

母標準偏差が分からない時

→ 標本標準偏差（分母 $n - 1$ ）に補正

→ それでも母標準偏差の前後ずれる

→ **t 分布**

今回の学習目標

t 分布

- σ が分からないときの標本平均の確率分布

標本から母平均を推定する際、これまで学習では、

標本平均の分布

母集団が平均 m 、標準偏差 σ のとき、
標本平均 \bar{X} の分布： $\bar{X} \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

標準化すると：

$$Z = \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

標本から母平均を推定する際、これまで学習では、

標本平均の分布

母集団が平均 m 、標準偏差 σ のとき、
標本平均 \bar{X} の分布： $\bar{X} \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

標準化すると：

$$t = \frac{\bar{X} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim ???$$

実際のデータ分析では、母標準偏差 σ は**未知**であるため、 σ の代用として、**標本標準偏差 s** を用いる。

$$t = \frac{\bar{X} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

σ の代わりに s で置き換えた統計量を t とすると、これは Z とは違うので t は厳密には標準正規分布 $N(0, 1)$ には**従わない**。では、どのような分布に従うのだろうか？

t 分布

標本平均とその標本標準偏差から母平均を推定するために正規分布を修正した確率分布として t 分布が作られた。

この分布は、1908 年にウィリアム・シーリー・ゴセット が発表したものです。彼は当時、ビール会社（Guinness 社）に勤めており、社外発表が禁止されていたため、“Student” というペンネームで論文 “The probable error of a mean” (Biometrika, 1908) を発表。

この中で彼は、新しい統計量 t を導入し、それに従う分布を「t-distribution (t 分布)」と呼びました。

t 分布の定義

母集団が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従い、
標本サイズが n のとき、

$$t = \frac{\bar{X} - m}{s/\sqrt{n}}$$

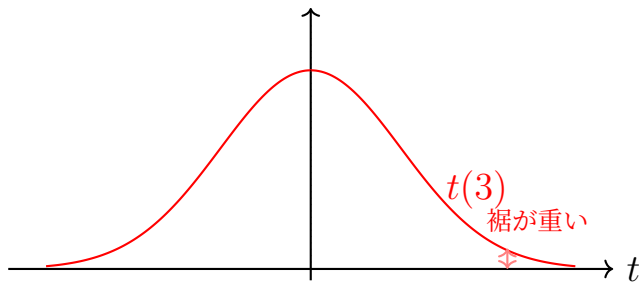
と定義される統計量 t は、**自由度 $(n - 1)$ の t 分布**に従う。

記号： $t(n - 1)$



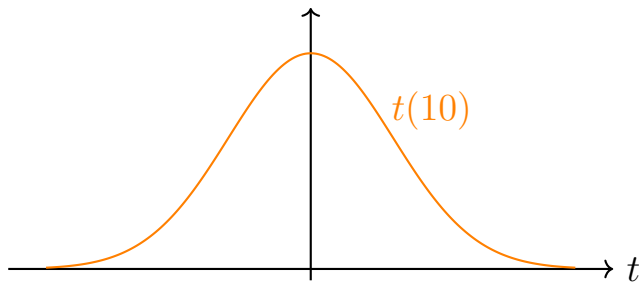
t 分布の性質：

- 平均 0、左右対称（正規分布と似ている）
- 正規分布 $N(0, 1)$ より**裾が重い**
- 自由度 $(n - 1)$ が大きくなると、正規分布 $N(0, 1)$ に近づく
- 自由度が小さいほど、裾が重い



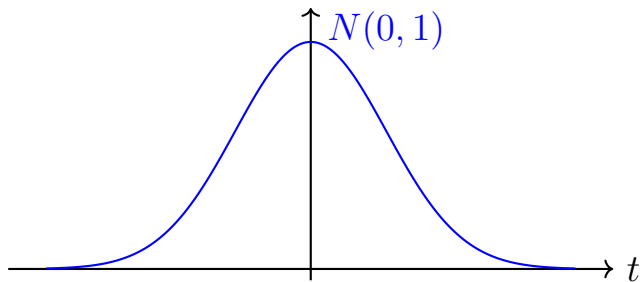
t 分布の性質：

- 平均 0、左右対称（正規分布と似ている）
- 正規分布 $N(0, 1)$ より**裾が重い**
- 自由度 $(n - 1)$ が大きくなると、正規分布 $N(0, 1)$ に近づく
- 自由度が小さいほど、裾が重い



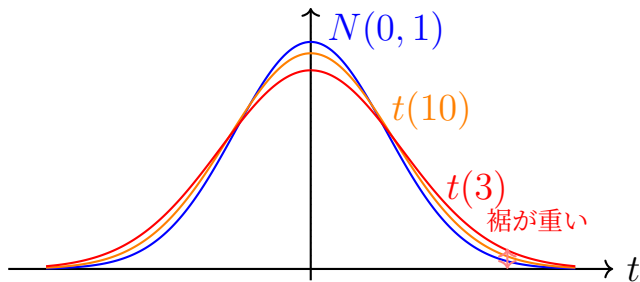
t 分布の性質：

- 平均 0、左右対称（正規分布と似ている）
- 正規分布 $N(0, 1)$ より**裾が重い**
- 自由度 $(n - 1)$ が大きくなると、正規分布 $N(0, 1)$ に近づく
- 自由度が小さいほど、裾が重い



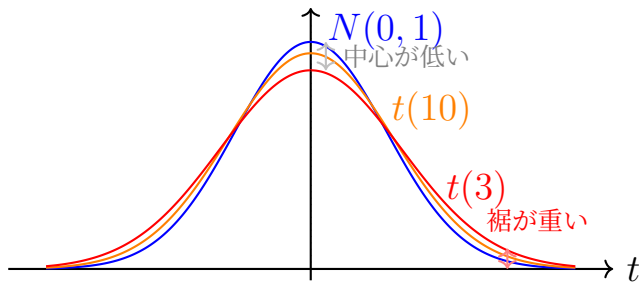
t 分布の性質：

- 平均 0、左右対称（正規分布と似ている）
- 正規分布 $N(0, 1)$ より**裾が重い**
- 自由度 $(n - 1)$ が大きくなると、正規分布 $N(0, 1)$ に近づく
- 自由度が小さいほど、裾が重い



t 分布の性質：

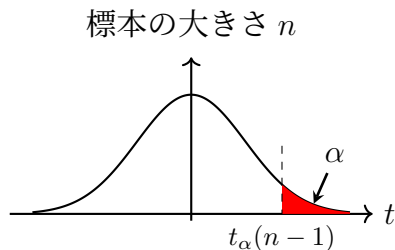
- 平均 0、左右対称（正規分布と似ている）
- 正規分布 $N(0, 1)$ より**裾が重い**
- 自由度 $(n - 1)$ が大きくなると、正規分布 $N(0, 1)$ に近づく
- 自由度が小さいほど、裾が重い



t 分布表の使い方 自由度ごとに異なる分布。 $t_{\alpha}(n-1)$ を表から値を読み取る。

【t 分布表 (抜粋)】

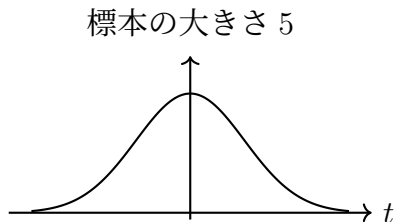
自由度	$t_{0.10}$	$t_{0.05}$	$t_{0.025}$	$t_{0.01}$	$t_{0.005}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576



t 分布表の使い方

【t 分布表 (抜粋)】

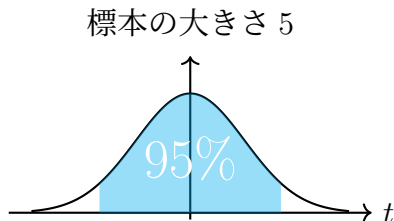
自由度	$t_{0.10}$	$t_{0.05}$	$t_{0.025}$	$t_{0.01}$	$t_{0.005}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576



t 分布表の使い方

【t 分布表 (抜粋)】

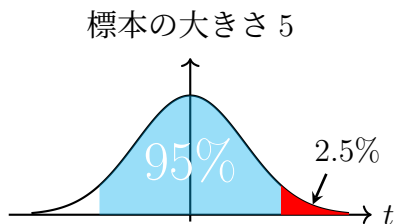
自由度	$t_{0.10}$	$t_{0.05}$	$t_{0.025}$	$t_{0.01}$	$t_{0.005}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576



t 分布表の使い方

【t 分布表 (抜粋)】

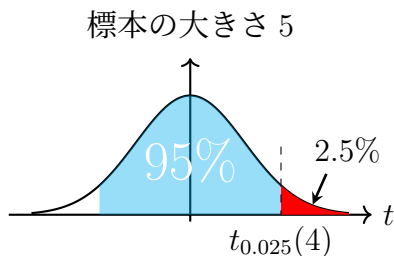
自由度	$t_{0.10}$	$t_{0.05}$	$t_{0.025}$	$t_{0.01}$	$t_{0.005}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576



t 分布表の使い方

【t 分布表 (抜粋)】

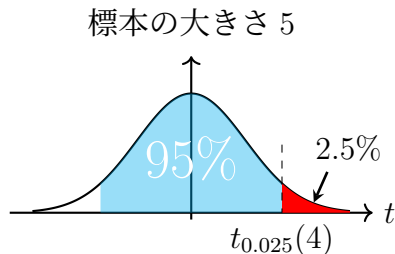
自由度	$t_{0.10}$	$t_{0.05}$	$t_{0.025}$	$t_{0.01}$	$t_{0.005}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576



t 分布表の使い方

【t 分布表 (抜粋)】

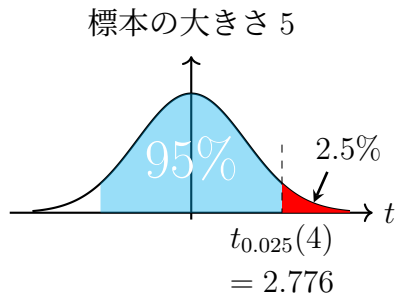
自由度	$t_{0.10}$	$t_{0.05}$	$t_{0.025}$	$t_{0.01}$	$t_{0.005}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576



t 分布表の使い方

【t 分布表 (抜粋)】

自由度	$t_{0.10}$	$t_{0.05}$	$t_{0.025}$	$t_{0.01}$	$t_{0.005}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576



例 1

自由度が 10 のとき、次の値を t 分布表から読みとりなさい。

(1) $t_{0.025}(10)$

(2) $t_{0.005}(10)$

自由度	$t_{0.10}$	$t_{0.05}$	$t_{0.025}$	$t_{0.01}$	$t_{0.005}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

例 1

自由度が 10 のとき、次の値を t 分布表から読みとりなさい。

(1) $t_{0.025}(10) = 2.228$

(2) $t_{0.005}(10)$

自由度	$t_{0.10}$	$t_{0.05}$	$t_{0.025}$	$t_{0.01}$	$t_{0.005}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576



例 1

自由度が 10 のとき、次の値を t 分布表から読みとりなさい。

(1) $t_{0.025}(10) = 2.228$

(2) $t_{0.005}(10)$

自由度	$t_{0.10}$	$t_{0.05}$	$t_{0.025}$	$t_{0.01}$	$t_{0.005}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576



例 1

自由度が 10 のとき、次の値を t 分布表から読みとりなさい。

$$(1) t_{0.025}(10) = 2.228$$

$$(2) t_{0.005}(10) = 3.169$$

自由度	$t_{0.10}$	$t_{0.05}$	$t_{0.025}$	$t_{0.01}$	$t_{0.005}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576



ビデオを止めて問題を解いてみよう

問 1 自由度が 30 のとき、次の値を t 分布表から読みとりなさい。

(1) $t_{0.025}(30)$

(2) $t_{0.005}(30)$

問 1

自由度が 30 のとき、次の値を t 分布表から読みとりなさい。

(1) $t_{0.025}(30)$

(2) $t_{0.005}(30)$

自由度	$t_{0.10}$	$t_{0.05}$	$t_{0.025}$	$t_{0.01}$	$t_{0.005}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576



問 1

自由度が 30 のとき、次の値を t 分布表から読みとりなさい。

(1) $t_{0.025}(30) = 2.042$

(2) $t_{0.005}(30)$

自由度	$t_{0.10}$	$t_{0.05}$	$t_{0.025}$	$t_{0.01}$	$t_{0.005}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576



問 1

自由度が 30 のとき、次の値を t 分布表から読みとりなさい。

(1) $t_{0.025}(30) = 2.042$

(2) $t_{0.005}(30)$

自由度	$t_{0.10}$	$t_{0.05}$	$t_{0.025}$	$t_{0.01}$	$t_{0.005}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576



問 1

自由度が 30 のとき、次の値を t 分布表から読みとりなさい。

(1) $t_{0.025}(30) = 2.042$

(2) $t_{0.005}(30) = 2.750$

自由度	$t_{0.10}$	$t_{0.05}$	$t_{0.025}$	$t_{0.01}$	$t_{0.005}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576



今回の学習目標

t 分布

- σ が分からないときの標本平均の確率分布