不偏分散は不偏推定量なのに、
その平方根である**標本標準偏差**を、
不偏標準偏差と呼ばないのは
なぜか？

今回の学習目標

不偏推定量って何？

- 標本標準偏差は「不偏」なのか？

math-support.jp

標本から母集団のパラメータ（母数）を推定する際、推定量が「不偏」であるとはどういうことだろうか？

math-support.jp

標本から母集団のパラメータ（母数）を推定する際、推定量が「不偏」であるとはどういうことだろうか？

不偏推定量の定義

推定量 $\hat{\theta}$ が母数 θ の**不偏推定量**であるとは、

$$\mathrm{E}(\hat{\theta}) = \theta$$

が成り立つことをいう。

つまり、推定量の期待値が真の値（母数）と一致する。

math-support.jp

標本から母集団のパラメータ（母数）を推定する際、推定量が「不偏」であるとはどういうことだろうか？

不偏推定量の定義

推定量 $\hat{\theta}$ が母数 θ の**不偏推定量**であるとは、

$$\mathrm{E}(\hat{\theta}) = \theta$$

が成り立つことをいう。

つまり、推定量の期待値が真の値（母数）と一致する。

【直感的な意味】 何度も標本を取り出して推定を繰り返したとき、推定値の平均が真の値に一致するということ

math-support.jp

標本平均は不偏推定量である

標本平均 $\bar{X}$ は、母平均 m の不偏推定量。

math-support.jp

標本平均は不偏推定量である

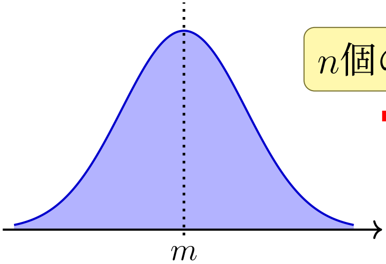
標本平均 $\bar{X}$ は、母平均 m の不偏推定量。 $\mathrm{E}(\overline{X}) = m$

math-support.jp

標本平均は不偏推定量である

標本平均 $\bar{X}$ は、母平均 m の不偏推定量。　$\mathrm{E}(\overline{X}) = m$

母集団Xの分布

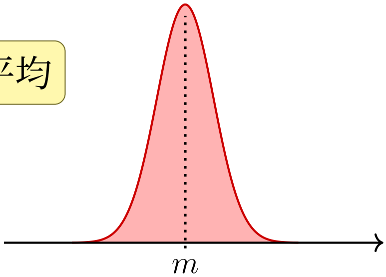


母平均：$\mathrm{E}(X) = m$

母標準偏差：$\sigma(X) = \sigma$

n個の標本平均

標本平均$\overline{X}$の分布



標本平均の平均：$\mathrm{E}(\overline{X}) = m$

標本平均の標準偏差：$\sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

math-support.jp

不偏分散は不偏推定量である

Q2201 で証明したように、不偏分散は名前の通り、母分散 σ^2 の不偏推定量である。

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum(X_i - \bar{X})^2$$

$$\mathrm{E}(s^2) = \sigma^2$$

math-support.jp

標本標準偏差は「不偏」なのか？

s^2 は不偏推定量だから「**不偏分散**」と呼ばれる。
では、その平方根である標本標準偏差

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

は「**不偏標準偏差**」と呼んでいいのだろうか？

math-support.jp

標本標準偏差は「不偏」なのか？

s^2 は不偏推定量だから「**不偏分散**」と呼ばれる。
では、その平方根である標本標準偏差

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

は「**不偏標準偏差**」と呼んでいいのだろうか？

不偏性があるのなら、$\mathrm{E}(s) = \sigma$ が成り立つはず。

math-support.jp

標本標準偏差は「不偏」なのか？

s^2 は不偏推定量だから「**不偏分散**」と呼ばれる。
では、その平方根である標本標準偏差

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

は「**不偏標準偏差**」と呼んでいいのだろうか？

不偏性があるのなら、$\mathrm{E}(s) = \sigma$ が成り立つはず。

少し簡単な例で考えてみよう。

math-support.jp

$\boxed{\text{例}}$　2 セットの標本から 2 つの不偏分散 s_1^2 と s_2^2 が得られたとする。

math-support.jp

$\boxed{\text{例}}$　2 セットの標本から 2 つの不偏分散 s_1^2 と s_2^2 が得られたとする。この 2 つの平均は

$$E(s^2) = \frac{s_1^2 + s_2^2}{2}$$

math-support.jp

$\boxed{\text{例}}$　2セットの標本から2つの不偏分散 s_1^2 と s_2^2 が得られたとする。この2つの平均は

$$E(s^2) = \frac{s_1^2 + s_2^2}{2}$$

不偏性とはこの標本の数が増えていったときに $\mathrm{E}(s^2) = \sigma^2$ であるということすなわち、$\sqrt{\mathrm{E}(s^2)} = \sigma$

math-support.jp

$\boxed{\text{例}}$　2セットの標本から2つの不偏分散 s_1^2 と s_2^2 が得られたとする。この2つの平均は

$$E(s^2) = \frac{s_1^2 + s_2^2}{2}$$

不偏性とはこの標本の数が増えていったときに $\mathrm{E}(s^2) = \sigma^2$ であるということすなわち、$\sqrt{\mathrm{E}(s^2)} = \sigma$
一方、不偏分散の平方根 s_1 と s_2 について平均を考えると

$$E(s) = \frac{s_1 + s_2}{2}$$

math-support.jp

$\boxed{\text{例}}$　2 セットの標本から 2 つの不偏分散 s_1^2 と s_2^2 が得られたとする。この 2 つの平均は

$$E(s^2) = \frac{s_1^2 + s_2^2}{2}$$

不偏性とはこの標本の数が増えていったときに $\mathrm{E}(s^2) = \sigma^2$ であるということすなわち、$\sqrt{\mathrm{E}(s^2)} = \sigma$

一方、不偏分散の平方根 s_1 と s_2 について平均を考えると

$$E(s) = \frac{s_1 + s_2}{2} \neq \sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{2}} = \sqrt{\mathrm{E}(s^2)}$$

math-support.jp

$\boxed{\text{例}}$　2セットの標本から2つの不偏分散 s_1^2 と s_2^2 が得られたとする。この2つの平均は

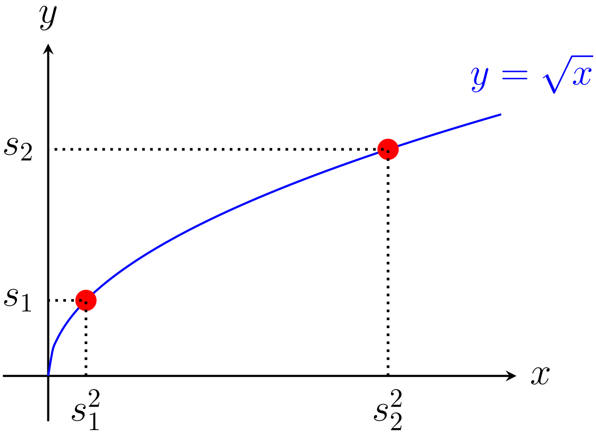
$$E(s^2) = \frac{s_1^2 + s_2^2}{2}$$

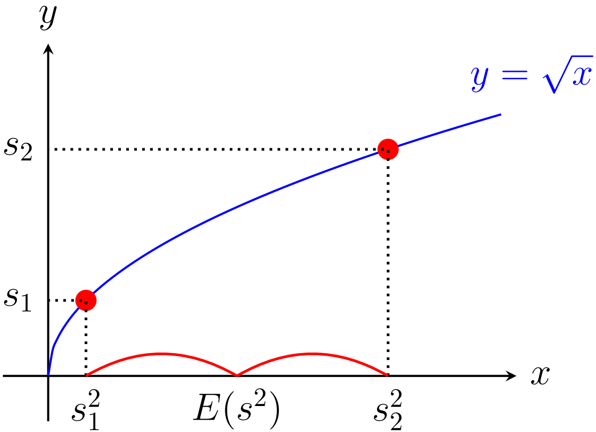
不偏性とはこの標本の数が増えていったときに $\mathrm{E}(s^2) = \sigma^2$ であるということすなわち、$\sqrt{\mathrm{E}(s^2)} = \sigma$
一方、不偏分散の平方根 s_1 と s_2 について平均を考えると

$$E(s) = \frac{s_1 + s_2}{2} \neq \sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{2}} = \sqrt{\mathrm{E}(s^2)}$$

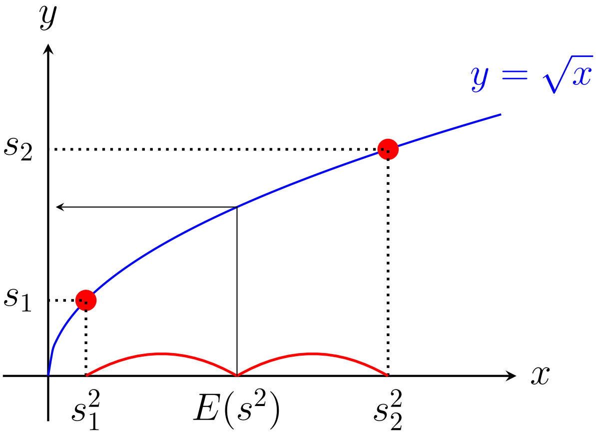
よって、$E(s) \neq \sigma$ であるから不偏性は無い。

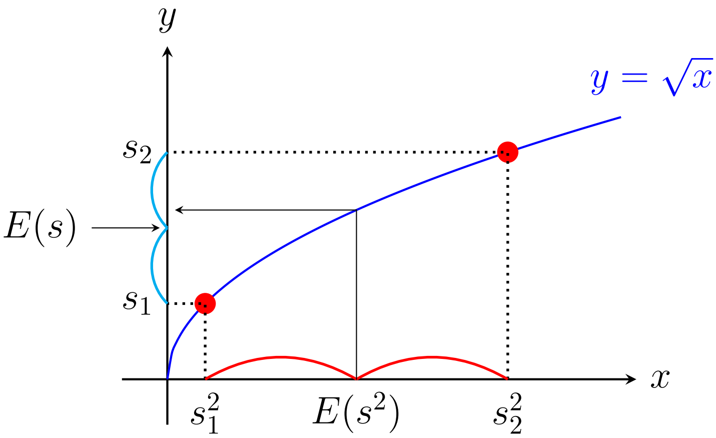
math-support.jp


y
$y=\sqrt{x}$
s_2
s_1
x
s_1^2
s_2^2

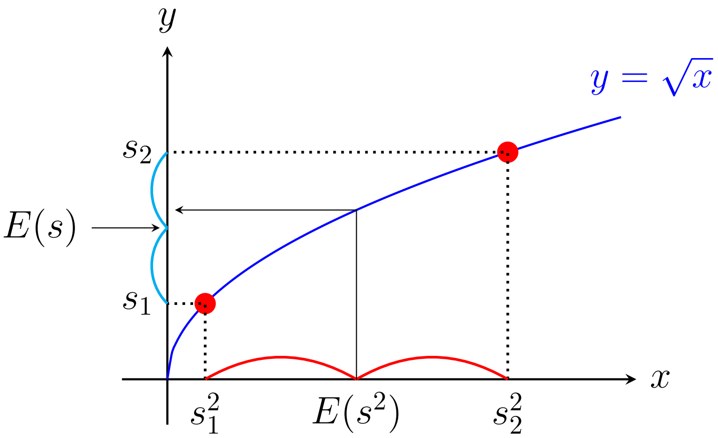


math-support.jp


y
$y = \sqrt{x}$
s_2
s_1
x
s_1^2
$E(s^2)$
s_2^2

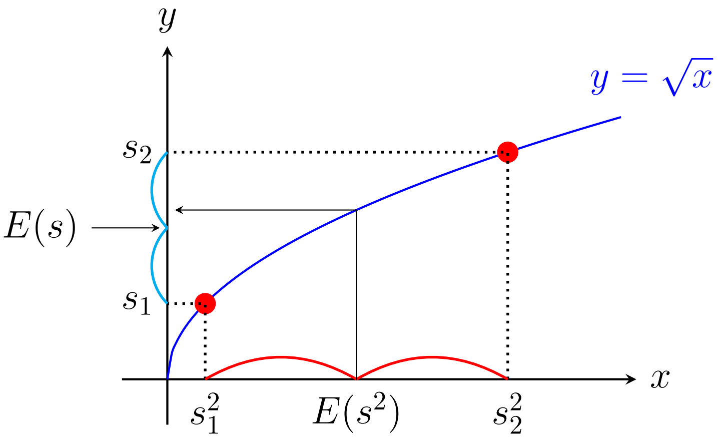


math-support.jp



$$E(s) < \sqrt{E(s^2)} = \sigma$$

math-support.jp



$$E(s) < \sqrt{E(s^2)} = \sigma \qquad E(s) \approx \sigma$$

math-support.jp

結論

$$\mathrm{E}(s) < \sigma$$

標本標準偏差 s は母標準偏差 σ の不偏推定量ではない。

math-support.jp

結論

$$\mathrm{E}(s) < \sigma$$

標本標準偏差 s は母標準偏差 σ の不偏推定量**ではない**。
わずかに過小評価する傾向がある。

math-support.jp

結論

$$\mathrm{E}(s) < \sigma$$

標本標準偏差 s は母標準偏差 σ の不偏推定量**ではない**。
わずかに過小評価する傾向がある。

だから、「不偏標準偏差」ではなく「**標本標準偏差**」と呼ぶのが正確である。

math-support.jp

実用上は問題ないのか？

標準標準偏差 s は不偏推定量ではないが、母平均の推定に用いても、実用上は問題ない。

理由：

- 偏りは小さい
- 標本サイズ n が大きくなれば、偏りはさらに小さくなる
- t **分布**を使えば、この偏りを考慮した正確な推定ができる

math-support.jp

実用上は問題ないのか？

標本標準偏差 s は不偏推定量ではないが、母平均の推定に用いても、実用上は問題ない。

理由：

- 偏りは小さい
- 標本サイズ n が大きくなれば、偏りはさらに小さくなる
- **t 分布**を使えば、この偏りを考慮した正確な推定ができる

この後に続く学習「t 分布」では、標本標準偏差 s を使った正確な母平均の推定方法を学ぶ。t 分布は、s が不偏推定量でないことを自動的に補正してくれる。

math-support.jp

ビデオを止めて問題を解いてみよう

問 1　次のうち不偏推定量であるものを記号で答えなさい。

(1) 標本平均 $\bar{x}$
(2) 不偏分散 s^2
(3) 標本標準偏差 s

問 1 次のうち不偏推定量であるものを記号で答えなさい。

(1) 標本平均 $\bar{x}$

(2) 不偏分散 s^2

(3) 標本標準偏差 s

$\boxed{\text{答}}$ $\bar{x}$, s^2

math-support.jp

今回の学習目標

不偏推定量って何？

- 標本標準偏差は「不偏」なのか？

math-support.jp