高校数学 B　数列

数学的帰納法 (1)

n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

math-support.jp

今回の学習目標

数学的帰納法の仕組みの理解する

- なぜ証明したことになるのか？

math-support.jp

例 1 n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

math-support.jp

例 1　n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

解説　与式が表しているのは、次のような複数の等式

math-support.jp

例 1　n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

解説　与式が表しているのは、次のような複数の等式

$n=1$ のとき、　$1=\frac{1}{2}\cdot 1(3\cdot 1-1)$

math-support.jp

例 1　n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

解説　与式が表しているのは、次のような複数の等式

$n=1$ のとき、　$1=\frac{1}{2}\cdot 1(3\cdot 1-1)$

$n=2$ のとき、　$1+4=\frac{1}{2}\cdot 2(3\cdot 2-1)$

math-support.jp

例 1　n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

解説　与式が表しているのは、次のような複数の等式

$n=1$ のとき、　$$1=\frac{1}{2}\cdot 1(3\cdot 1-1)$$

$n=2$ のとき、　$$1+4=\frac{1}{2}\cdot 2(3\cdot 2-1)$$

$n=3$ のとき、　$$1+4+7=\frac{1}{2}\cdot 3(3\cdot 3-1)$$

math-support.jp

例 1　n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

解説　与式が表しているのは、次のような複数の等式

$n=1$ のとき、$$1=\frac{1}{2}\cdot 1(3\cdot 1-1)$$

$n=2$ のとき、$$1+4=\frac{1}{2}\cdot 2(3\cdot 2-1)$$

$n=3$ のとき、$$1+4+7=\frac{1}{2}\cdot 3(3\cdot 3-1)$$

$n=4$ のとき、$$1+4+7+10=\frac{1}{2}\cdot 4(3\cdot 4-1)$$

math-support.jp

例 1 n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

解説 与式が表しているのは、次のような複数の等式

$n=1$ のとき、 $$1=\frac{1}{2}\cdot 1(3\cdot 1-1)$$

$n=2$ のとき、 $$1+4=\frac{1}{2}\cdot 2(3\cdot 2-1)$$

$n=3$ のとき、 $$1+4+7=\frac{1}{2}\cdot 3(3\cdot 3-1)$$

$n=4$ のとき、 $$1+4+7+10=\frac{1}{2}\cdot 4(3\cdot 4-1)$$

$\vdots$ $\qquad\qquad$ $\vdots$

math-support.jp

例 1　n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

解説　与式が表しているのは、次のような複数の等式

$n=1$ のとき、$$1=\frac{1}{2}\cdot 1(3\cdot 1-1)$$

$n=2$ のとき、$$1+4=\frac{1}{2}\cdot 2(3\cdot 2-1)$$

$n=3$ のとき、$$1+4+7=\frac{1}{2}\cdot 3(3\cdot 3-1)$$

$n=4$ のとき、$$1+4+7+10=\frac{1}{2}\cdot 4(3\cdot 4-1)$$

$\vdots$　　　　$\vdots$

これら無限の等式を全て証明することは不可能

例 1 n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

math-support.jp

例 1　n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{1}{2}n(3n - 1)$$

[1]　まず $n = 1$ のとき成り立つことを証明する。

例 1 n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{1}{2}n(3n - 1)$$

[1] まず $n = 1$ のとき成り立つことを証明する。

[2] $n = k$ のとき成り立つと仮定して、

math-support.jp

例 1　n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

[1]　まず $n=1$ のとき成り立つことを証明する。

[2]　$n=k$ のとき成り立つと仮定して、
$n=k+1$ のとき成り立つことを証明する。

math-support.jp

例 1　n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

[1]　まず $n=1$ のとき成り立つことを証明する。

[2]　$n=k$ のとき成り立つと仮定して、
$n=k+1$ のとき成り立つことを証明する。

上記、**[1]** **[2]** が成り立てば、全ての n で成り立つ。

例 1　n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

証明

math-support.jp

例 1 n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{1}{2}n(3n - 1)$$

証明

[**1**] $n = 1$ のとき、

math-support.jp

例 1　n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{1}{2}n(3n - 1)$$

証明

[**1**] $n = 1$ のとき、

$$(\text{左辺}) = 1$$

math-support.jp

例 1　n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

証明

[**1**] $n=1$ のとき、

$$(\text{左辺})=1$$

$$(\text{右辺})=\frac{1}{2}\cdot 1(3\cdot 1-1)=1$$

math-support.jp

例 1　n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

証明

[**1**] $n=1$ のとき、

$$(\text{左辺})=1$$

$$(\text{右辺})=\frac{1}{2}\cdot 1(3\cdot 1-1)=1$$

よって、(左辺)=(右辺) が成り立つ。

math-support.jp

例 1　n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{1}{2}n(3n - 1)$$

math-support.jp

例 1 n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

[2] $n=k$ のとき成り立つと仮定すると、

math-support.jp

例 1　n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

[2] $n=k$ のとき成り立つと仮定すると、

$1+4+7+\cdots+(3k-2)=\dfrac{1}{2}k(3k-1)$ が成り立つ。

math-support.jp

例 1　n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

[2] $n=k$ のとき成り立つと仮定すると、

$1+4+7+\cdots+(3k-2)=\dfrac{1}{2}k(3k-1)$ が成り立つ。

$n=k+1$ のとき、

math-support.jp

例 1 n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

[2] $n=k$ のとき成り立つと仮定すると、

$1+4+7+\cdots+(3k-2)=\dfrac{1}{2}k(3k-1)$ が成り立つ。

$n=k+1$ のとき、

$(\text{左辺})=1+4+7+\cdots+(3k-2)+(3k+1)$

math-support.jp

例 1 n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

[2] $n=k$ のとき成り立つと仮定すると、

$1+4+7+\cdots+(3k-2)=\frac{1}{2}k(3k-1)$ が成り立つ。

$n=k+1$ のとき、

$$(\text{左辺})=1+4+7+\cdots+(3k-2)+(3k+1)$$
$$=\frac{1}{2}k(3k-1)+\frac{2}{2}(3k+1)$$

math-support.jp

例 1 n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

[2] $n=k$ のとき成り立つと仮定すると、

$1+4+7+\cdots+(3k-2)=\frac{1}{2}k(3k-1)$ が成り立つ。

$n=k+1$ のとき、

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= 1+4+7+\cdots+(3k-2)+(3k+1)\\ &= \frac{1}{2}k(3k-1)+\frac{2}{2}(3k+1)\\ &= \frac{1}{2}\left(3k^2+5k+2\right)\end{aligned}$$

math-support.jp

例 1　n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

$n=k+1$ のとき、

$$(\text{左辺})=\frac{1}{2}\left(3k^2+5k+2\right)$$

math-support.jp

例 1　n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

$n=k+1$ のとき、

$$(\text{左辺})=\frac{1}{2}\left(3k^2+5k+2\right)$$

$$(\text{右辺})=$$

math-support.jp

例 1　n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

$n=k+1$ のとき、

$$(\text{左辺})=\frac{1}{2}\left(3k^2+5k+2\right)$$

$$(\text{右辺})=\frac{1}{2}(k+1)\left\{3(k+1)-1\right\}$$

math-support.jp

例 1　n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

$n=k+1$ のとき、

$$(\text{左辺})=\frac{1}{2}\left(3k^2+5k+2\right)$$

$$(\text{右辺})=\frac{1}{2}(k+1)\{3(k+1)-1\}=\frac{1}{2}(k+1)(3k+2)$$

math-support.jp

例 1 n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

$n=k+1$ のとき、

$$(\text{左辺})=\frac{1}{2}\left(3k^2+5k+2\right)$$

$$(\text{右辺})=\frac{1}{2}(k+1)\left\{3(k+1)-1\right\}=\frac{1}{2}(k+1)(3k+2)$$

$$=\frac{1}{2}(3k^2+5k+2)$$

math-support.jp

例 1 n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

$n=k+1$ のとき、

$$(\text{左辺})=\frac{1}{2}\left(3k^2+5k+2\right)$$

$$(\text{右辺})=\frac{1}{2}(k+1)\left\{3(k+1)-1\right\}=\frac{1}{2}(k+1)(3k+2)$$

$$=\frac{1}{2}(3k^2+5k+2)$$

$n=k+1$ のときも、(左辺)=(右辺) が成り立つ。

math-support.jp

例 1　n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

$n=k+1$ のとき、

$$(\text{左辺})=\frac{1}{2}\left(3k^2+5k+2\right)$$

$$(\text{右辺})=\frac{1}{2}(k+1)\{3(k+1)-1\}=\frac{1}{2}(k+1)(3k+2)$$

$$=\frac{1}{2}(3k^2+5k+2)$$

$n=k+1$ のときも、(左辺)=(右辺) が成り立つ。

[1] [2] より、全ての自然数について、与式が成り立つ。

math-support.jp

ビデオを止めて問題を解いてみよう

問 1　n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

(1)　$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$

(2)　$1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(2n-1) = \dfrac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

math-support.jp

問 1　(1)　$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$

math-support.jp

問 1　(1)　$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$

[1]　$n = 1$ のとき、

math-support.jp

問 1　(1)　$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$

[**1**]　$n=1$ のとき、

$(\text{左辺})=1$

math-support.jp

問 1　(1)　$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$

[1]　$n=1$ のとき、

$$(\text{左辺})=1$$

$$(\text{右辺})=\frac{1}{3}\cdot 1(2\cdot 1-1)(2\cdot 1+1)=1$$

math-support.jp

問 1　(1)　$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$

[**1**]　$n=1$ のとき、

$$(\text{左辺})=1$$

$$(\text{右辺})=\frac{1}{3}\cdot 1(2\cdot 1-1)(2\cdot 1+1)=1$$

よって、(左辺)=(右辺) が成り立つ。

math-support.jp

問 1　(1)　$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$

math-support.jp

問 1 (1) $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$

[2] $n=k$ のとき成り立つと仮定すると、

math-support.jp

問 1　(1)　$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$

[2] $n=k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2=\frac{1}{3}k(2k-1)(2k+1)$$

math-support.jp

問 1 (1) $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$

[2] $n=k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2=\frac{1}{3}k(2k-1)(2k+1)$$

$n=k+1$ のとき、

math-support.jp

問 1 (1) $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$

[**2**] $n=k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2=\frac{1}{3}k(2k-1)(2k+1)$$

$n=k+1$ のとき、

$(\text{左辺})=1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2$

math-support.jp

問 1　(1)　$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$

[**2**] $n=k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2=\frac{1}{3}k(2k-1)(2k+1)$$

$n=k+1$ のとき、

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2\\&=\frac{1}{3}k(2k-1)(2k+1)+\frac{3}{3}(2k+1)(2k+1)\end{aligned}$$

math-support.jp

問 1　(1)　$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$

[**2**] $n=k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2=\frac{1}{3}k(2k-1)(2k+1)$$

$n=k+1$ のとき、

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2\\&=\frac{1}{3}k(2k-1)(2k+1)+\frac{3}{3}(2k+1)(2k+1)\\&=\frac{1}{3}(2k+1)\left\{2k^2-k+6k+3\right\}\end{aligned}$$

math-support.jp

問 1　(1)　$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$

[2] $n=k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2=\frac{1}{3}k(2k-1)(2k+1)$$

$n=k+1$ のとき、

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2\\&=\frac{1}{3}k(2k-1)(2k+1)+\frac{3}{3}(2k+1)(2k+1)\\&=\frac{1}{3}(2k+1)\left\{2k^2-k+6k+3\right\}\\&=\frac{1}{3}(2k+1)(2k^2+5k+3)\end{aligned}$$

math-support.jp

問 1　(1)　$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$

$n=k+1$ のとき、

$(\text{左辺})=\dfrac{1}{3}(2k+1)(2k^2+5k+3)$

math-support.jp

問 1　(1)　$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$

$n = k+1$ のとき、

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{3}(2k+1)(2k^2+5k+3)$$

$$(\text{右辺}) = \frac{1}{3}(k+1)\left\{2(k+1)-1\right\}\left\{2(k+1)+1\right\}$$

math-support.jp

問 1 (1) $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$

$n=k+1$ のとき、

$$(\text{左辺})=\frac{1}{3}(2k+1)(2k^2+5k+3)$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=\frac{1}{3}(k+1)\left\{2(k+1)-1\right\}\left\{2(k+1)+1\right\}\\&=\frac{1}{3}(k+1)(2k+1)(2k+3)\end{aligned}$$

math-support.jp

問 1　(1)　$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$

$n=k+1$ のとき、

$$(\text{左辺})=\frac{1}{3}(2k+1)(2k^2+5k+3)$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=\frac{1}{3}(k+1)\{2(k+1)-1\}\{2(k+1)+1\}\\&=\frac{1}{3}(k+1)(2k+1)(2k+3)\\&=\frac{1}{3}(2k+1)(2k^2+5k+3)\end{aligned}$$

math-support.jp

問 1　(1)　$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$

$n=k+1$ のとき、

$$(\text{左辺})=\frac{1}{3}(2k+1)(2k^2+5k+3)$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=\frac{1}{3}(k+1)\left\{2(k+1)-1\right\}\left\{2(k+1)+1\right\}\\&=\frac{1}{3}(k+1)(2k+1)(2k+3)\\&=\frac{1}{3}(2k+1)(2k^2+5k+3)\end{aligned}$$

$n=k+1$ のときも、(左辺)=(右辺) が成り立つ。

math-support.jp

問 1 (1) $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$

$n=k+1$ のとき、

$$(\text{左辺})=\frac{1}{3}(2k+1)(2k^2+5k+3)$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=\frac{1}{3}(k+1)\left\{2(k+1)-1\right\}\left\{2(k+1)+1\right\}\\&=\frac{1}{3}(k+1)(2k+1)(2k+3)\\&=\frac{1}{3}(2k+1)(2k^2+5k+3)\end{aligned}$$

$n=k+1$ のときも、(左辺)=(右辺) が成り立つ。

[1] **[2]** より、全ての自然数について、与式が成り立つ。

math-support.jp

$$(2) \quad 1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 5+\cdots+n(2n-1)=\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$$

math-support.jp

(2) $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(2n-1) = \dfrac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

[**1**] $n = 1$ のとき、

(2) $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(2n-1) = \dfrac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

[**1**] $n = 1$ のとき、

$(\text{左辺}) = 1$

math-support.jp

(2) $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(2n-1) = \dfrac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

[**1**] $n = 1$ のとき、

$$(\text{左辺}) = 1$$

$$(\text{右辺}) = \frac{1}{6} \cdot 1(1+1)(4 \cdot 1 - 1) = 1$$

math-support.jp

(2) $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(2n-1) = \dfrac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

[1] $n = 1$ のとき、

$$(\text{左辺}) = 1$$

$$(\text{右辺}) = \frac{1}{6} \cdot 1(1+1)(4 \cdot 1 - 1) = 1$$

よって、(左辺)=(右辺) が成り立つ。

math-support.jp

$$(2) \quad 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(2n-1) = \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$$

math-support.jp

(2) $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(2n-1) = \dfrac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

[2] $n = k$ のとき成り立つと仮定すると、

math-support.jp

(2) $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(2n-1) = \dfrac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

[2] $n = k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \cdots + k(2k-1) = \frac{1}{6}k(k+1)(4k-1)$$

math-support.jp

(2) $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(2n-1) = \dfrac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

[2] $n = k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \cdots + k(2k-1) = \frac{1}{6}k(k+1)(4k-1)$$

$n = k + 1$ のとき、

math-support.jp

(2) $1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 5+\cdots+n(2n-1)=\dfrac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

[2] $n=k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 5+\cdots+k(2k-1)=\frac{1}{6}k(k+1)(4k-1)$$

$n=k+1$ のとき、

$$(\text{左辺})=1\cdot 1+\cdots+k(2k-1)+(k+1)(2k+1)$$

math-support.jp

(2) $1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 5+\cdots+n(2n-1)=\dfrac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

[2] $n=k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 5+\cdots+k(2k-1)=\frac{1}{6}k(k+1)(4k-1)$$

$n=k+1$ のとき、

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=1\cdot 1+\cdots+k(2k-1)+(k+1)(2k+1)\\&=\frac{1}{6}k(k+1)(4k-1)+\frac{6}{6}(k+1)(2k+1)\end{aligned}$$

math-support.jp

(2) $1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 5+\cdots+n(2n-1)=\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

[2] $n=k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 5+\cdots+k(2k-1)=\frac{1}{6}k(k+1)(4k-1)$$

$n=k+1$ のとき、

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= 1\cdot 1+\cdots+k(2k-1)+(k+1)(2k+1)\\ &= \frac{1}{6}k(k+1)(4k-1)+\frac{6}{6}(k+1)(2k+1)\\ &= \frac{1}{6}(k+1)\{4k^2-k+12k+6\}\end{aligned}$$

math-support.jp

(2) $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(2n-1) = \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

[2] $n = k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \cdots + k(2k-1) = \frac{1}{6}k(k+1)(4k-1)$$

$n = k+1$ のとき、

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= 1 \cdot 1 + \cdots + k(2k-1) + (k+1)(2k+1) \\ &= \frac{1}{6}k(k+1)(4k-1) + \frac{6}{6}(k+1)(2k+1) \\ &= \frac{1}{6}(k+1)\{4k^2 - k + 12k + 6\} \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(4k^2 + 11k + 6)\end{aligned}$$

math-support.jp

(2) $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(2n-1) = \dfrac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

$n = k+1$ のとき、

$(\text{左辺}) = \dfrac{1}{6}(k+1)(4k^2 + 11k + 6)$

math-support.jp

(2) $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(2n-1) = \dfrac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

$n = k+1$ のとき、

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{6}(k+1)(4k^2+11k+6)$$

$$(\text{右辺}) = \frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{4(k+1)-1\}$$

math-support.jp

(2) $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(2n-1) = \dfrac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

$n = k+1$ のとき、

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{6}(k+1)(4k^2+11k+6)$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= \frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{4(k+1)-1\} \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(4k+3)\end{aligned}$$

math-support.jp

(2) $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(2n-1) = \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

$n = k+1$ のとき、

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{6}(k+1)(4k^2+11k+6)$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= \frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{4(k+1)-1\} \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(4k+3) \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(4k^2+11k+6)\end{aligned}$$

math-support.jp

(2) $1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 5+\cdots+n(2n-1)=\dfrac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

$n=k+1$ のとき、

$$(\text{左辺})=\frac{1}{6}(k+1)(4k^2+11k+6)$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=\frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{4(k+1)-1\}\\&=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(4k+3)\\&=\frac{1}{6}(k+1)(4k^2+11k+6)\end{aligned}$$

$n=k+1$ のときも、(左辺)=(右辺) が成り立つ。

math-support.jp

(2) $1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 5+\cdots+n(2n-1)=\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

$n=k+1$ のとき、

$$(左辺)=\frac{1}{6}(k+1)(4k^2+11k+6)$$

$$\begin{aligned}(右辺)&=\frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{4(k+1)-1\}\\&=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(4k+3)\\&=\frac{1}{6}(k+1)(4k^2+11k+6)\end{aligned}$$

$n=k+1$ のときも、(左辺)=(右辺) が成り立つ。

[1] **[2]** より、全ての自然数について、与式が成り立つ。

今回の学習目標

数学的帰納法の仕組みの理解する

- なぜ証明したことになるのか？

math-support.jp