数学的帰納法で不等式の証明

n が 2 以上の自然数であるとき、
不等式 $3^n > 2n + 1$ が成り立つことを
数学的帰納法で証明せよ。

今回の学習目標

数学的帰納法を使った不等式の証明

- $n = 1$ から始まるとは限らない
- $n = k$ のときの、不等式の利用のしかた

math-support.jp

例 1　n が 2 以上の自然数であるとき、不等式 $3^n > 2n+1$ が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。

math-support.jp

例 1　n が 2 以上の自然数であるとき、不等式 $3^n > 2n+1$ が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。

証明　$P(n) = 3^n - 2n - 1 > 0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

math-support.jp

$\boxed{\text{例 1}}$　n が 2 以上の自然数であるとき、不等式 $3^n > 2n+1$ が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。

$\boxed{\text{証明}}$　$P(n) = 3^n - 2n - 1 > 0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

[**1**] $n = 2$ のとき、

math-support.jp

例 1　n が 2 以上の自然数であるとき、不等式 $3^n > 2n+1$ が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。

証明　$P(n) = 3^n - 2n - 1 > 0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

[1] $n = 2$ のとき、

$$P(2) = 3^2 - 4 - 1 = 4$$

math-support.jp

例 1　n が 2 以上の自然数であるとき、不等式 $3^n > 2n+1$ が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。

証明　$P(n) = 3^n - 2n - 1 > 0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

[**1**] $n = 2$ のとき、

$$P(2) = 3^2 - 4 - 1 = 4$$

$P(2) > 0$ であるので、不等式は成り立つ。

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n) = 3^n - 2n - 1 > 0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n) = 3^n - 2n - 1 > 0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 2)$ のとき、成り立つと仮定すると、

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n) = 3^n - 2n - 1 > 0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 2)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$P(k) = 3^k - 2k - 1 > 0$ である。

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n) = 3^n - 2n - 1 > 0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

[**2**] $n = k\ (\geqq 2)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$P(k) = 3^k - 2k - 1 > 0$ である。

$$3^k > 2k + 1$$

math-support.jp

証明　$P(n)=3^n-2n-1>0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

[2] $n=k\ (\geqq 2)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k)=3^k-2k-1>0 \text{ である。}$$

$$3^k>2k+1$$

$n=k+1$ のとき、

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n) = 3^n - 2n - 1 > 0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 2)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 3^k - 2k - 1 > 0 \text{ である。}$$

$$3^k > 2k + 1$$

$n = k + 1$ のとき、

$$P(k+1) = 3^{k+1} - 2(k+1) - 1$$

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n) = 3^n - 2n - 1 > 0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 2)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 3^k - 2k - 1 > 0 \text{ である。}$$

$$3^k > 2k + 1$$

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 3^{k+1} - 2(k+1) - 1 \\ &= 3 \cdot 3^k - 2(k+1) - 1 \end{aligned}$$

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n) = 3^n - 2n - 1 > 0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

[**2**] $n = k\ (\geqq 2)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$P(k) = 3^k - 2k - 1 > 0$ である。

$$3^k > 2k + 1$$

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 3^{k+1} - 2(k+1) - 1 \\ &= 3 \cdot 3^k - 2(k+1) - 1 \\ &> 3\,(2k+1) - 2(k+1) - 1 \end{aligned}$$

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n)=3^n-2n-1>0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

[2] $n=k\ (\geqq 2)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$P(k)=3^k-2k-1>0$ である。

$$3^k>2k+1$$

$n=k+1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1)&=3^{k+1}-2(k+1)-1\\ &=3\cdot 3^k-2(k+1)-1\\ &>3\,(2k+1)-2(k+1)-1\\ &=6k+3-2k-2-1 \end{aligned}$$

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$　$P(n) = 3^n - 2n - 1 > 0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 2)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$P(k) = 3^k - 2k - 1 > 0$ である。

$$3^k > 2k + 1$$

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 3^{k+1} - 2(k+1) - 1 \\ &= 3 \cdot 3^k - 2(k+1) - 1 \\ &> 3\,(2k+1) - 2(k+1) - 1 \\ &= 6k + 3 - 2k - 2 - 1 \ = 4k \end{aligned}$$

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n) = 3^n - 2n - 1 > 0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 2)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$P(k) = 3^k - 2k - 1 > 0$ である。

$$3^k > 2k + 1$$

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 3^{k+1} - 2(k+1) - 1 \\ &= 3 \cdot 3^k - 2(k+1) - 1 \\ &> 3(2k+1) - 2(k+1) - 1 \\ &= 6k + 3 - 2k - 2 - 1 \quad = 4k \end{aligned}$$

$k \geqq 2$ であるので、$P(k+1) > 0$ となり、

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n) = 3^n - 2n - 1 > 0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 2)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$P(k) = 3^k - 2k - 1 > 0$ である。

$$3^k > 2k + 1$$

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 3^{k+1} - 2(k+1) - 1 \\ &= 3 \cdot 3^k - 2(k+1) - 1 \\ &> 3\,(2k+1) - 2(k+1) - 1 \\ &= 6k + 3 - 2k - 2 - 1 \ = 4k \end{aligned}$$

$k \geqq 2$ であるので、$P(k+1) > 0$ となり、

$n = k + 1$ のときも不等式は成り立つ。

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n) = 3^n - 2n - 1 > 0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 2)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 3^k - 2k - 1 > 0 \text{ である。}$$

$$3^k > 2k + 1$$

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 3^{k+1} - 2(k+1) - 1 \\ &= 3 \cdot 3^k - 2(k+1) - 1 \\ &> 3\,(2k+1) - 2(k+1) - 1 \\ &= 6k + 3 - 2k - 2 - 1 \ = 4k \end{aligned}$$

$k \geqq 2$ であるので、$P(k+1) > 0$ となり、

$n = k + 1$ のときも不等式は成り立つ。

[1] [2] より、2 以上の自然数で $P(n) > 0$ であるので、

不等式 $3^n > 2n + 1$ が成り立つ。

math-support.jp

ビデオを止めて問題を解いてみよう

問 1　n が 4 以上の自然数であるとき、
不等式 $2^n > 3n + 1$ が成り立つことを数学的
帰納法で証明せよ。

math-support.jp

問 1　n が 4 以上の自然数であるとき、不等式 $2^n > 3n + 1$ が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。

math-support.jp

問 1　n が 4 以上の自然数であるとき、不等式 $2^n > 3n+1$ が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。

証明　$P(n) = 2^n - 3n - 1 > 0 \quad (n \geqq 4)$ を証明する。

math-support.jp

問 1　n が 4 以上の自然数であるとき、不等式 $2^n > 3n+1$ が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。

$\boxed{\text{証明}}$　$P(n) = 2^n - 3n - 1 > 0 \quad (n \geqq 4)$ を証明する。

[1] $n = 4$ のとき、

math-support.jp

問 1　n が 4 以上の自然数であるとき、不等式 $2^n > 3n+1$ が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。

$\boxed{\text{証明}}$　$P(n) = 2^n - 3n - 1 > 0 \quad (n \geqq 4)$ を証明する。

[1] $n = 4$ のとき、

$$P(4) = 2^4 - 12 - 1 = 3$$

math-support.jp

問 1　n が 4 以上の自然数であるとき、不等式 $2^n > 3n+1$ が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。

$\boxed{\text{証明}}$　$P(n) = 2^n - 3n - 1 > 0 \quad (n \geqq 4)$ を証明する。

[1] $n = 4$ のとき、

$$P(4) = 2^4 - 12 - 1 = 3$$

$P(4) > 0$ であるので、不等式は成り立つ。

math-support.jp

証明 $P(n) = 2^n - 3n - 1 > 0 \quad (n \geqq 4)$ を証明する。

math-support.jp

$\boxed{\textbf{証明}}$ $P(n) = 2^n - 3n - 1 > 0 \quad (n \geqq 4)$ を証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 4)$ のとき、成り立つと仮定すると、

math-support.jp

$\boxed{\textbf{証明}}$ $P(n) = 2^n - 3n - 1 > 0 \quad (n \geqq 4)$ を証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 4)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 2^k - 3k - 1 > 0$$

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n) = 2^n - 3n - 1 > 0 \quad (n \geqq 4)$ を証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 4)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 2^k - 3k - 1 > 0 \qquad 2^k > 3k + 1$$

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n) = 2^n - 3n - 1 > 0 \quad (n \geqq 4)$ を証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 4)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 2^k - 3k - 1 > 0 \qquad 2^k > 3k + 1$$

$n = k + 1$ のとき、

math-support.jp

証明　$P(n) = 2^n - 3n - 1 > 0 \quad (n \geqq 4)$ を証明する。

[**2**] $n = k\ (\geqq 4)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 2^k - 3k - 1 > 0 \qquad 2^k > 3k + 1$$

$n = k + 1$ のとき、

$$P(k+1) = 2^{k+1} - 3(k+1) - 1$$

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n) = 2^n - 3n - 1 > 0 \quad (n \geqq 4)$ を証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 4)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 2^k - 3k - 1 > 0 \qquad 2^k > 3k + 1$$

$n = k + 1$ のとき、

$$P(k+1) = 2^{k+1} - 3(k+1) - 1$$
$$= 2 \cdot 2^k - 3(k+1) - 1$$

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$　$P(n) = 2^n - 3n - 1 > 0 \quad (n \geqq 4)$ を証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 4)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 2^k - 3k - 1 > 0 \qquad 2^k > 3k + 1$$

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^{k+1} - 3(k+1) - 1 \\ &= 2 \cdot 2^k - 3(k+1) - 1 \\ &> 2(3k+1) - 3(k+1) - 1 \end{aligned}$$

math-support.jp

$\boxed{\textbf{証明}}$ $P(n) = 2^n - 3n - 1 > 0 \quad (n \geqq 4)$ を証明する。

[2] $n = k \ (\geqq 4)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 2^k - 3k - 1 > 0 \qquad 2^k > 3k + 1$$

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^{k+1} - 3(k+1) - 1 \\ &= 2 \cdot 2^k - 3(k+1) - 1 \\ &> 2(3k+1) - 3(k+1) - 1 \\ &= 6k + 2 - 3k - 3 - 1 \end{aligned}$$

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n) = 2^n - 3n - 1 > 0 \quad (n \geqq 4)$ を証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 4)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 2^k - 3k - 1 > 0 \qquad 2^k > 3k + 1$$

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^{k+1} - 3(k+1) - 1 \\ &= 2 \cdot 2^k - 3(k+1) - 1 \\ &> 2(3k+1) - 3(k+1) - 1 \\ &= 6k + 2 - 3k - 3 - 1 \qquad = 3k - 2 \end{aligned}$$

math-support.jp

証明 $P(n) = 2^n - 3n - 1 > 0 \quad (n \geqq 4)$ を証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 4)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 2^k - 3k - 1 > 0 \qquad 2^k > 3k + 1$$

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^{k+1} - 3(k+1) - 1 \\ &= 2 \cdot 2^k - 3(k+1) - 1 \\ &> 2(3k+1) - 3(k+1) - 1 \\ &= 6k + 2 - 3k - 3 - 1 \qquad = 3k - 2 \end{aligned}$$

ここで、$k \geqq 4$ であるので、$3k \geqq 12$ より、

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n) = 2^n - 3n - 1 > 0 \quad (n \geqq 4)$ を証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 4)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 2^k - 3k - 1 > 0 \qquad 2^k > 3k + 1$$

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^{k+1} - 3(k+1) - 1 \\ &= 2 \cdot 2^k - 3(k+1) - 1 \\ &> 2(3k+1) - 3(k+1) - 1 \\ &= 6k + 2 - 3k - 3 - 1 \qquad = 3k - 2 \end{aligned}$$

ここで、$k \geqq 4$ であるので、$3k \geqq 12$ より、

$$3k - 2 \geqq 12 - 2$$

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n) = 2^n - 3n - 1 > 0 \quad (n \geqq 4)$ を証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 4)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 2^k - 3k - 1 > 0 \qquad 2^k > 3k + 1$$

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^{k+1} - 3(k+1) - 1 \\ &= 2 \cdot 2^k - 3(k+1) - 1 \\ &> 2(3k+1) - 3(k+1) - 1 \\ &= 6k + 2 - 3k - 3 - 1 \quad = 3k - 2 \end{aligned}$$

ここで、$k \geqq 4$ であるので、$3k \geqq 12$ より、

$$3k - 2 \geqq 12 - 2 \ = 10 > 0$$

math-support.jp

証明 $P(n)=2^n-3n-1>0 \quad (n \geqq 4)$ を証明する。

[2] $n=k\ (\geqq 4)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k)=2^k-3k-1>0 \qquad 2^k>3k+1$$

$n=k+1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^{k+1}-3(k+1)-1 \\ &= 2\cdot 2^k-3(k+1)-1 \\ &> 2(3k+1)-3(k+1)-1 \\ &= 6k+2-3k-3-1 \quad = 3k-2 \end{aligned}$$

ここで、$k \geqq 4$ であるので、$3k \geqq 12$ より、

$$3k-2 \geqq 12-2 \ = 10>0$$

$P(k+1)>0$ となり、

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n) = 2^n - 3n - 1 > 0 \quad (n \geqq 4)$ を証明する。

[**2**] $n = k\ (\geqq 4)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 2^k - 3k - 1 > 0 \qquad 2^k > 3k + 1$$

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^{k+1} - 3(k+1) - 1 \\ &= 2 \cdot 2^k - 3(k+1) - 1 \\ &> 2(3k+1) - 3(k+1) - 1 \\ &= 6k + 2 - 3k - 3 - 1 \quad = 3k - 2 \end{aligned}$$

ここで、$k \geqq 4$ であるので、$3k \geqq 12$ より、

$$3k - 2 \geqq 12 - 2 \;= 10 > 0$$

$P(k+1) > 0$ となり、 $n = k + 1$ のときも不等式は成り立つ。

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n) = 2^n - 3n - 1 > 0 \quad (n \geqq 4)$ を証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 4)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 2^k - 3k - 1 > 0 \qquad\qquad 2^k > 3k + 1$$

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^{k+1} - 3(k+1) - 1 \\ &= 2 \cdot 2^k - 3(k+1) - 1 \\ &> 2(3k+1) - 3(k+1) - 1 \\ &= 6k + 2 - 3k - 3 - 1 \quad = 3k - 2 \end{aligned}$$

ここで、$k \geqq 4$ であるので、$3k \geqq 12$ より、

$$3k - 2 \geqq 12 - 2 \ = 10 > 0$$

$P(k+1) > 0$ となり、 $n = k + 1$ のときも不等式は成り立つ。

[1] [2] より、 4 以上の自然数で $P(n) > 0$ であるので、

不等式 $2^n > 3n + 1$ が成り立つ。

math-support.jp

例 2 n は 2 以上の自然数で、$0 < h < 1$ とするとき、不等式 $(1-h)^n > 1 - nh$ の成立を証明せよ。

math-support.jp

例 2　n は 2 以上の自然数で、$0 < h < 1$ とするとき、不等式 $(1-h)^n > 1 - nh$ の成立を証明せよ。

証明　$P(n) = (1-h)^n + nh - 1 > 0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

math-support.jp

例 2　n は 2 以上の自然数で、$0 < h < 1$ とするとき、不等式 $(1-h)^n > 1 - nh$ の成立を証明せよ。

証明　$P(n) = (1-h)^n + nh - 1 > 0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

[1] $n = 2$ のとき、

math-support.jp

例 2　n は 2 以上の自然数で、$0 < h < 1$ とするとき、不等式 $(1-h)^n > 1 - nh$ の成立を証明せよ。

証明　$P(n) = (1-h)^n + nh - 1 > 0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

[1] $n = 2$ のとき、

$$P(2) = (1-h)^2 + 2h - 1$$

math-support.jp

例 2　n は 2 以上の自然数で、$0 < h < 1$ とするとき、不等式 $(1-h)^n > 1 - nh$ の成立を証明せよ。

証明　$P(n) = (1-h)^n + nh - 1 > 0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

[1] $n = 2$ のとき、

$$\begin{aligned} P(2) &= (1-h)^2 + 2h - 1 \\ &= 1 - 2h + h^2 + 2h - 1 \end{aligned}$$

math-support.jp

例 2　n は 2 以上の自然数で、$0 < h < 1$ とするとき、不等式 $(1-h)^n > 1 - nh$ の成立を証明せよ。

証明　$P(n) = (1-h)^n + nh - 1 > 0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

[1] $n = 2$ のとき、

$$\begin{aligned} P(2) &= (1-h)^2 + 2h - 1 \\ &= 1 - 2h + h^2 + 2h - 1 \\ &= h^2 > 0 \end{aligned}$$

math-support.jp

例 2　n は 2 以上の自然数で、$0 < h < 1$ とするとき、不等式 $(1-h)^n > 1 - nh$ の成立を証明せよ。

証明　$P(n) = (1-h)^n + nh - 1 > 0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

[1] $n = 2$ のとき、

$$
\begin{aligned}
P(2) &= (1-h)^2 + 2h - 1 \\
&= 1 - 2h + h^2 + 2h - 1 \\
&= h^2 > 0
\end{aligned}
$$

$P(2) > 0$ であるので、不等式は成り立つ。

math-support.jp

$\boxed{\textbf{証明}}$ $P(n) = (1-h)^n + nh - 1 > 0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 2)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k) = (1-h)^k + kh - 1 > 0$$

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n) = (1-h)^n + nh - 1 > 0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 2)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k) = (1-h)^k + kh - 1 > 0$$

$$(1-h)^k > 1 - kh$$

math-support.jp

$\boxed{\textbf{証明}}$ $P(n) = (1-h)^n + nh - 1 > 0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 2)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k) = (1-h)^k + kh - 1 > 0$$

$$(1-h)^k > 1 - kh$$

$n = k + 1$ のとき、

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n) = (1-h)^n + nh - 1 > 0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

[**2**] $n = k\ (\geqq 2)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k) = (1-h)^k + kh - 1 > 0$$

$$(1-h)^k > 1 - kh$$

$n = k+1$ のとき、

$$P(k+1) = (1-h)^{k+1} + (k+1)h - 1$$

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n) = (1-h)^n + nh - 1 > 0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 2)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k) = (1-h)^k + kh - 1 > 0$$

$$(1-h)^k > 1 - kh$$

$n = k+1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= (1-h)^{k+1} + (k+1)h - 1 \\ &= (1-h) \cdot (1-h)^k + (k+1)h - 1 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n) = (1-h)^n + nh - 1 > 0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 2)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k) = (1-h)^k + kh - 1 > 0$$

$$(1-h)^k > 1 - kh$$

$n = k+1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= (1-h)^{k+1} + (k+1)h - 1 \\ &= (1-h)\cdot(1-h)^k + (k+1)h - 1 \\ &> (1-h)\cdot(1-kh) + (k+1)h - 1 \end{aligned}$$

math-support.jp

$\boxed{\textbf{証明}}$ $P(n) = (1-h)^n + nh - 1 > 0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 2)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k) = (1-h)^k + kh - 1 > 0$$

$$(1-h)^k > 1 - kh$$

$n = k+1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= (1-h)^{k+1} + (k+1)h - 1 \\ &= (1-h) \cdot (1-h)^k + (k+1)h - 1 \\ &> (1-h) \cdot (1-kh) + (k+1)h - 1 \\ &= 1 - kh - h + kh^2 + kh + h - 1 \end{aligned}$$

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n) = (1-h)^n + nh - 1 > 0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 2)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k) = (1-h)^k + kh - 1 > 0$$

$$(1-h)^k > 1 - kh$$

$n = k+1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= (1-h)^{k+1} + (k+1)h - 1 \\ &= (1-h) \cdot (1-h)^k + (k+1)h - 1 \\ &> (1-h) \cdot (1-kh) + (k+1)h - 1 \\ &= 1 - kh - h + kh^2 + kh + h - 1 \quad = kh^2 \end{aligned}$$

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n) = (1-h)^n + nh - 1 > 0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 2)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k) = (1-h)^k + kh - 1 > 0$$

$$(1-h)^k > 1 - kh$$

$n = k+1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= (1-h)^{k+1} + (k+1)h - 1 \\ &= (1-h) \cdot (1-h)^k + (k+1)h - 1 \\ &> (1-h) \cdot (1-kh) + (k+1)h - 1 \\ &= 1 - kh - h + kh^2 + kh + h - 1 \quad = kh^2 \end{aligned}$$

$k \geqq 2$ であるので、$P(k+1) > 0$ となり、

math-support.jp

証明 $P(n) = (1-h)^n + nh - 1 > 0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 2)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k) = (1-h)^k + kh - 1 > 0$$

$$(1-h)^k > 1 - kh$$

$n = k+1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= (1-h)^{k+1} + (k+1)h - 1 \\ &= (1-h) \cdot (1-h)^k + (k+1)h - 1 \\ &> (1-h) \cdot (1-kh) + (k+1)h - 1 \\ &= 1 - kh - h + kh^2 + kh + h - 1 \quad = kh^2 \end{aligned}$$

$k \geqq 2$ であるので、$P(k+1) > 0$ となり、
$n = k+1$ のときも不等式は成り立つ。

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n) = (1-h)^n + nh - 1 > 0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 2)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k) = (1-h)^k + kh - 1 > 0$$

$$(1-h)^k > 1 - kh$$

$n = k+1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= (1-h)^{k+1} + (k+1)h - 1 \\ &= (1-h)\cdot(1-h)^k + (k+1)h - 1 \\ &> (1-h)\cdot(1-kh) + (k+1)h - 1 \\ &= 1 - kh - h + kh^2 + kh + h - 1 \ = kh^2 \end{aligned}$$

$k \geqq 2$ であるので、$P(k+1) > 0$ となり、

$n = k+1$ のときも不等式は成り立つ。

[1] [2] より、2 以上の自然数で $P(n) > 0$ であるので、

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n) = (1-h)^n + nh - 1 > 0 \quad (n \geqq 2)$ を証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 2)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k) = (1-h)^k + kh - 1 > 0$$

$$(1-h)^k > 1 - kh$$

$n = k+1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= (1-h)^{k+1} + (k+1)h - 1 \\ &= (1-h) \cdot (1-h)^k + (k+1)h - 1 \\ &> (1-h) \cdot (1-kh) + (k+1)h - 1 \\ &= 1 - kh - h + kh^2 + kh + h - 1 \quad = kh^2 \end{aligned}$$

$k \geqq 2$ であるので、$P(k+1) > 0$ となり、

$n = k+1$ のときも不等式は成り立つ。

[1] [2] より、２以上の自然数で $P(n) > 0$ であるので、

不等式 $(1-h)^n > 1 - nh$ が成り立つ。

math-support.jp

ビデオを止めて問題を解いてみよう

問 2 n を 4 以上の自然数とするとき、
不等式 $n! > 2^n$ が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。

math-support.jp

問 2　n を 4 以上の自然数とするとき、不等式 $n! > 2^n$ が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。

math-support.jp

問 2　n を 4 以上の自然数とするとき、不等式 $n! > 2^n$ が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。

$\boxed{\text{証明}}$　$P(n) = n! - 2^n > 0$ を数学的帰納法で証明する。

math-support.jp

問 2　n を 4 以上の自然数とするとき、不等式 $n! > 2^n$ が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。

$\boxed{\text{証明}}$　$P(n) = n! - 2^n > 0$ を数学的帰納法で証明する。

[1] $n = 4$ のとき、

問 2　n を 4 以上の自然数とするとき、不等式 $n! > 2^n$ が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。

$\boxed{\text{証明}}$　$P(n) = n! - 2^n > 0$ を数学的帰納法で証明する。

[**1**] $n = 4$ のとき、

$$P(4) = 4! - 2^4 = 24 - 16 = 8$$

math-support.jp

問 2　n を 4 以上の自然数とするとき、不等式 $n! > 2^n$ が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。

$\boxed{\text{証明}}$　$P(n) = n! - 2^n > 0$ を数学的帰納法で証明する。

[1] $n = 4$ のとき、

$$P(4) = 4! - 2^4 = 24 - 16 = 8$$

$P(4) > 0$ であるので、不等式は成り立つ。

math-support.jp

証明　$P(n)=n!-2^n>0$ を数学的帰納法で証明する。

[2] $n=k\ (\geqq 4)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k)=k!-2^k>0 \text{ である。}$$

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n) = n! - 2^n > 0$ を数学的帰納法で証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 4)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$P(k) = k! - 2^k > 0$ である。　$k! > 2^k$

証明 $P(n) = n! - 2^n > 0$ を数学的帰納法で証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 4)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$P(k) = k! - 2^k > 0$ である。 $k! > 2^k$

$n = k + 1$ のとき、

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n) = n! - 2^n > 0$ を数学的帰納法で証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 4)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$P(k) = k! - 2^k > 0$ である。 $k! > 2^k$

$n = k + 1$ のとき、

$P(k+1) = (k+1)! - 2^{k+1}$

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n) = n! - 2^n > 0$ を数学的帰納法で証明する。

[2] $n = k \ (\geqq 4)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k) = k! - 2^k > 0 \text{ である。}$$

$k! > 2^k$

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= (k+1)! - 2^{k+1} \\ &= k! \cdot (k+1) - 2^{k+1} \end{aligned}$$

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n)=n!-2^n>0$ を数学的帰納法で証明する。

[2] $n=k\ (\geqq 4)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k)=k!-2^k>0 \text{ である。}$$

$$k!>2^k$$

$n=k+1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= (k+1)!-2^{k+1} \\ &= k!\cdot(k+1)-2^{k+1} \\ &> 2^k\cdot(k+1)-2^{k+1} \end{aligned}$$

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n) = n! - 2^n > 0$ を数学的帰納法で証明する。

[**2**] $n = k\ (\geqq 4)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$P(k) = k! - 2^k > 0$ である。 $k! > 2^k$

$n = k + 1$ のとき、

$$
\begin{aligned}
P(k+1) &= (k+1)! - 2^{k+1} \\
&= k! \cdot (k+1) - 2^{k+1} \\
&> 2^k \cdot (k+1) - 2^{k+1} \\
&= (k+1)2^k - 2 \cdot 2^k
\end{aligned}
$$

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n) = n! - 2^n > 0$ を数学的帰納法で証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 4)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$P(k) = k! - 2^k > 0$ である。 $k! > 2^k$

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= (k+1)! - 2^{k+1} \\ &= k! \cdot (k+1) - 2^{k+1} \\ &> 2^k \cdot (k+1) - 2^{k+1} \\ &= (k+1)2^k - 2 \cdot 2^k \\ &= (k-1)2^k \end{aligned}$$

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n) = n! - 2^n > 0$ を数学的帰納法で証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 4)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$P(k) = k! - 2^k > 0$ である。 $k! > 2^k$

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= (k+1)! - 2^{k+1} \\ &= k! \cdot (k+1) - 2^{k+1} \\ &> 2^k \cdot (k+1) - 2^{k+1} \\ &= (k+1)2^k - 2 \cdot 2^k \\ &= (k-1)2^k \end{aligned}$$

ここで、$k \geqq 4$ であるので、$k - 1 > 4 - 1 = 3 > 0$ より、

math-support.jp

証明 $P(n)=n!-2^n>0$ を数学的帰納法で証明する。

[2] $n=k\ (\geqq 4)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k)=k!-2^k>0 \text{ である。}$$

$k!>2^k$

$n=k+1$ のとき、

$$\begin{aligned}P(k+1)&=(k+1)!-2^{k+1}\\&=k!\cdot(k+1)-2^{k+1}\\&>2^k\cdot(k+1)-2^{k+1}\\&=(k+1)2^k-2\cdot 2^k\\&=(k-1)2^k\end{aligned}$$

ここで、$k\geqq 4$ であるので、$k-1>4-1=3>0$ より、

$P(k+1)>0$ となり、$n=k+1$ のときも成り立つ。

math-support.jp

$\boxed{\textbf{証明}}$ $P(n) = n! - 2^n > 0$ を数学的帰納法で証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 4)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$P(k) = k! - 2^k > 0$ である。 $k! > 2^k$

$n = k+1$ のとき、

$$
\begin{aligned}
P(k+1) &= (k+1)! - 2^{k+1} \\
&= k! \cdot (k+1) - 2^{k+1} \\
&> 2^k \cdot (k+1) - 2^{k+1} \\
&= (k+1)2^k - 2 \cdot 2^k \\
&= (k-1)2^k
\end{aligned}
$$

ここで、$k \geqq 4$ であるので、$k - 1 > 4 - 1 = 3 > 0$ より、

$P(k+1) > 0$ となり、$n = k+1$ のときも成り立つ。

[1] [2] より、4以上の自然数で $P(n) > 0$ であるので、

$\boxed{\text{証明}}$ $P(n) = n! - 2^n > 0$ を数学的帰納法で証明する。

[2] $n = k\ (\geqq 4)$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$P(k) = k! - 2^k > 0 \text{ である。} \qquad k! > 2^k$$

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= (k+1)! - 2^{k+1} \\ &= k! \cdot (k+1) - 2^{k+1} \\ &> 2^k \cdot (k+1) - 2^{k+1} \\ &= (k+1)2^k - 2 \cdot 2^k \\ &= (k-1)2^k \end{aligned}$$

ここで、$k \geqq 4$ であるので、$k - 1 > 4 - 1 = 3 > 0$ より、

$P(k+1) > 0$ となり、$n = k + 1$ のときも成り立つ。

[1] **[2]** より、4 以上の自然数で $P(n) > 0$ であるので、

不等式 $n! > 2^n$ が成り立つ。

math-support.jp

今回の学習目標

数学的帰納法を使った不等式の証明

- $n = 1$ から始まるとは限らない
- $n = k$ のときの、不等式の利用のしかた

math-support.jp