数学的帰納法で倍数の証明

n を自然数とするとき，
$4^{n+1}+9^n$ は 5 の倍数であることを，
数学的帰納法を用いて証明せよ。

math-support.jp

今回の学習目標

数学的帰納法で $n = k$ のときの情報の活かし方

math-support.jp

数学的帰納法の証明手順

math-support.jp

数学的帰納法の証明手順

[1]　まず $n = 1$ のとき成り立つことを証明する。

math-support.jp

数学的帰納法の証明手順

[1]　まず $n = 1$ のとき成り立つことを証明する。

[2]　$n = k$ のとき成り立つと仮定して、
$n = k + 1$ のとき成り立つことを証明する。

math-support.jp

数学的帰納法の証明手順

[1]　まず $n = 1$ のとき成り立つことを証明する。

[2]　$n = k$ のとき成り立つと仮定して、
$n = k + 1$ のとき成り立つことを証明する。

上記、**[1]** **[2]** が成り立てば、全ての n で成り立つ。

math-support.jp

例 1　n は自然数とする。このとき，$4n^3 - n$ は 3 の倍数であることを，数学的帰納法で証明せよ。

証明

math-support.jp

例 1　n は自然数とする。このとき，$4n^3 - n$ は 3 の倍数であることを，数学的帰納法で証明せよ。

証明

命題「$P(n) = 4n^3 - n$ は 3 の倍数である」を数学的帰納法を用いて証明する。

math-support.jp

例 1　n は自然数とする。このとき，$4n^3 - n$ は 3 の倍数であることを，数学的帰納法で証明せよ。

証明

命題「$P(n) = 4n^3 - n$ は 3 の倍数である」を数学的帰納法を用いて証明する。

[1]　$n = 1$ のとき、

math-support.jp

例 1　n は自然数とする。このとき，$4n^3 - n$ は 3 の倍数であることを，数学的帰納法で証明せよ。

証明

命題「$P(n) = 4n^3 - n$ は 3 の倍数である」を数学的帰納法を用いて証明する。

[1]　$n = 1$ のとき、

$$P(1) = 4 - 1 = 3$$

math-support.jp

例 1　n は自然数とする。このとき，$4n^3 - n$ は 3 の倍数であることを，数学的帰納法で証明せよ。

証明

命題「$P(n) = 4n^3 - n$ は 3 の倍数である」を数学的帰納法を用いて証明する。

[1]　$n = 1$ のとき、

$$P(1) = 4 - 1 = 3$$

$\therefore$ 3 は、3 の倍数なので命題は成り立つ。

$\boxed{\text{証明}}$　命題「$P(n) = 4n^3 - n$ は 3 の倍数である」を証明。

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ 命題「$P(n) = 4n^3 - n$ は 3 の倍数である」を証明。

[2] $n = k$ のとき成り立つと仮定すると、

$\boxed{\textbf{証明}}$　命題「$P(n) = 4n^3 - n$ は 3 の倍数である」を証明。

[2]　$n = k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 4k^3 - k = 3m \quad (m \text{ は整数}) \qquad \cdots (\alpha)$$

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ 命題「$P(n)=4n^3-n$ は 3 の倍数である」を証明。

[2] $n=k$ のとき成り立つと仮定すると、

$P(k)=4k^3-k=3m$ (m は整数) $\cdots(\alpha)$

$n=k+1$ のとき、

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ 命題「$P(n) = 4n^3 - n$ は 3 の倍数である」を証明。

[2] $n = k$ のとき成り立つと仮定すると、

$P(k) = 4k^3 - k = 3m \quad$ (m は整数) $\quad \cdots(\alpha)$

$n = k + 1$ のとき、

$P(k+1) = 4(k+1)^3 - (k+1)$

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$　命題「$P(n)=4n^3-n$ は 3 の倍数である」を証明。

[2]　$n=k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$P(k)=4k^3-k=3m \quad (m \text{ は整数}) \qquad \cdots(\alpha)$$

$n=k+1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 4(k+1)^3-(k+1) \\ &= 4k^3+12k^2+12k+4-k-1 \end{aligned}$$

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ 命題「$P(n) = 4n^3 - n$ は 3 の倍数である」を証明。

[2] $n = k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 4k^3 - k = 3m \quad (m \text{ は整数}) \qquad \cdots(\alpha)$$

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 4(k+1)^3 - (k+1) \\ &= 4k^3 + 12k^2 + 12k + 4 - k - 1 \\ &= 4k^3 + 12k^2 + 11k + 3 \end{aligned}$$

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$　命題「$P(n) = 4n^3 - n$ は 3 の倍数である」を証明。

[2]　$n = k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 4k^3 - k = 3m \quad (m \text{ は整数}) \qquad \cdots(\alpha)$$

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 4(k+1)^3 - (k+1) \\ &= 4k^3 + 12k^2 + 12k + 4 - k - 1 \\ &= 4k^3 + 12k^2 + 11k + 3 \\ &= 3m + k + 12k^2 + 11k + 3 \end{aligned}$$

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ 命題「$P(n) = 4n^3 - n$ は 3 の倍数である」を証明。

[2] $n = k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 4k^3 - k = 3m \quad (m \text{ は整数}) \qquad \cdots (\alpha)$$

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 4(k+1)^3 - (k+1) \\ &= 4k^3 + 12k^2 + 12k + 4 - k - 1 \\ &= 4k^3 + 12k^2 + 11k + 3 \\ &= 3m + k + 12k^2 + 11k + 3 \\ &= 12k^2 + 12k + 3m + 3 \end{aligned}$$

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ 命題「$P(n) = 4n^3 - n$ は 3 の倍数である」を証明。

[2] $n = k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 4k^3 - k = 3m \quad (m \text{ は整数}) \qquad \cdots(\alpha)$$

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 4(k+1)^3 - (k+1) \\ &= 4k^3 + 12k^2 + 12k + 4 - k - 1 \\ &= 4k^3 + 12k^2 + 11k + 3 \\ &= 3m + k + 12k^2 + 11k + 3 \\ &= 12k^2 + 12k + 3m + 3 \\ &= 3(4k^2 + 3k + m + 1) \end{aligned}$$

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$　命題「$P(n)=4n^3-n$ は 3 の倍数である」を証明。

[**2**]　$n=k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$P(k)=4k^3-k=3m \quad (m \text{ は整数}) \qquad \cdots(\alpha)$$

$n=k+1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 4(k+1)^3-(k+1) \\ &= 4k^3+12k^2+12k+4-k-1 \\ &= 4k^3+12k^2+11k+3 \\ &= 3m+k+12k^2+11k+3 \\ &= 12k^2+12k+3m+3 \\ &= 3(4k^2+3k+m+1) \end{aligned}$$

$(4k^2+3k+m+1)$ は整数だから、

math-support.jp

$\boxed{\textbf{証明}}$ 命題「$P(n) = 4n^3 - n$ は 3 の倍数である」を証明。

[2] $n = k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 4k^3 - k = 3m \quad (m \text{ は整数}) \qquad \cdots (\alpha)$$

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 4(k+1)^3 - (k+1) \\ &= 4k^3 + 12k^2 + 12k + 4 - k - 1 \\ &= 4k^3 + 12k^2 + 11k + 3 \\ &= 3m + k + 12k^2 + 11k + 3 \\ &= 12k^2 + 12k + 3m + 3 \\ &= 3(4k^2 + 3k + m + 1) \end{aligned}$$

$(4k^2 + 3k + m + 1)$ は整数だから、 $P(k+1)$ は 3 の倍数。

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ 命題「$P(n) = 4n^3 - n$ は 3 の倍数である」を証明。

[2] $n = k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 4k^3 - k = 3m \quad (m \text{ は整数}) \qquad \cdots(\alpha)$$

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned}
P(k+1) &= 4(k+1)^3 - (k+1) \\
&= 4k^3 + 12k^2 + 12k + 4 - k - 1 \\
&= 4k^3 + 12k^2 + 11k + 3 \\
&= 3m + k + 12k^2 + 11k + 3 \\
&= 12k^2 + 12k + 3m + 3 \\
&= 3(4k^2 + 3k + m + 1)
\end{aligned}$$

$(4k^2 + 3k + m + 1)$ は整数だから、 $P(k+1)$ は 3 の倍数。

したがって、$n = k + 1$ のときも成立する。

math-support.jp

$\boxed{\textbf{証明}}$　命題「$P(n) = 4n^3 - n$ は 3 の倍数である」を証明。

[2]　$n = k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 4k^3 - k = 3m \quad (m \text{ は整数}) \qquad \cdots(\alpha)$$

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 4(k+1)^3 - (k+1) \\ &= 4k^3 + 12k^2 + 12k + 4 - k - 1 \\ &= 4k^3 + 12k^2 + 11k + 3 \\ &= 3m + k + 12k^2 + 11k + 3 \\ &= 12k^2 + 12k + 3m + 3 \\ &= 3(4k^2 + 3k + m + 1) \end{aligned}$$

$(4k^2 + 3k + m + 1)$ は整数だから、 $P(k+1)$ は 3 の倍数。

したがって、$n = k + 1$ のときも成立する。

[1], [2] より、全ての自然数において $P(n)$ は 3 の倍数である。

ビデオを止めて問題を解いてみよう

問 1 n を自然数とするとき，次の事柄を, 数学的帰納法を用いて証明せよ。

(1) $6^{2n}-1$ は 7 の倍数である。

(2) $4^{n+1}+9^n$ は 5 の倍数である。

math-support.jp

問 1 (1) $6^{2n}-1$ は 7 の倍数である。

math-support.jp

問 1 (1) $6^{2n}-1$ は 7 の倍数である。

証明　命題「$P(n) = 6^{2n}-1$ は 7 の倍数である」を証明する。

math-support.jp

問 1 (1) $6^{2n}-1$ は 7 の倍数である。

$\boxed{\text{証明}}$　命題「$P(n) = 6^{2n}-1$ は 7 の倍数である」を証明する。

[1]　$n=1$ のとき、

math-support.jp

問 1 (1) $6^{2n}-1$ は 7 の倍数である。

$\boxed{\text{証明}}$ 命題「$P(n)=6^{2n}-1$ は 7 の倍数である」を証明する。

[1] $n=1$ のとき、

$$P(1)=6^2-1=35$$

math-support.jp

問 1 (1) $6^{2n}-1$ は 7 の倍数である。

$\boxed{\textbf{証明}}$　命題「$P(n)=6^{2n}-1$ は 7 の倍数である」を証明する。

[1]　$n=1$ のとき、

$$P(1)=6^2-1=35$$

$\therefore$ 35 は、7 の倍数なので命題は成り立つ。

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$　命題「$P(n) = 6^{2n} - 1$ は 7 の倍数である」を証明する。

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$　命題「$P(n) = 6^{2n} - 1$ は 7 の倍数である」を証明する。

[2]　$n = k$ のとき成り立つと仮定すると、

math-support.jp

$\boxed{\textbf{証明}}$ 命題「$P(n)=6^{2n}-1$ は 7 の倍数である」を証明する。

[2] $n=k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$P(k)=6^{2k}-1=7m \quad (m \text{ は整数}) \qquad \cdots(\alpha)$$

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ 命題「$P(n)=6^{2n}-1$ は 7 の倍数である」を証明する。

[2] $n=k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$P(k)=6^{2k}-1=7m \quad (m \text{ は整数}) \qquad \cdots(\alpha)$$

$n=k+1$ のとき、

math-support.jp

$\boxed{\textbf{証明}}$　命題「$P(n) = 6^{2n} - 1$ は 7 の倍数である」を証明する。

[2]　$n = k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 6^{2k} - 1 = 7m \quad (m \text{ は整数}) \qquad \cdots(\alpha)$$

$n = k + 1$ のとき、

$$P(k+1) = 6^{2(k+1)} - 1$$

math-support.jp

$\boxed{\textbf{証明}}$ 命題「$P(n) = 6^{2n} - 1$ は 7 の倍数である」を証明する。

[2] $n = k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 6^{2k} - 1 = 7m \quad (m \text{ は整数}) \qquad \cdots (\alpha)$$

$n = k + 1$ のとき、

$$P(k+1) = 6^{2(k+1)} - 1 = 6^{2k+2} - 1$$

math-support.jp

証明　命題「$P(n) = 6^{2n} - 1$ は 7 の倍数である」を証明する。

[2]　$n = k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 6^{2k} - 1 = 7m \quad (m \text{ は整数}) \qquad \cdots (\alpha)$$

$n = k + 1$ のとき、

$$P(k+1) = 6^{2(k+1)} - 1 = 6^{2k+2} - 1$$

$$= 36 \cdot 6^{2k} - 1$$

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ 命題「$P(n) = 6^{2n} - 1$ は 7 の倍数である」を証明する。

[2] $n = k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 6^{2k} - 1 = 7m \quad (m \text{ は整数}) \qquad \cdots(\alpha)$$

$n = k + 1$ のとき、

$$P(k+1) = 6^{2(k+1)} - 1 = 6^{2k+2} - 1$$

$$= 36 \cdot 6^{2k} - 1$$

$$= 36(7m + 1) - 1$$

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$　命題「$P(n)=6^{2n}-1$ は 7 の倍数である」を証明する。

[2]　$n=k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$P(k)=6^{2k}-1=7m \qquad (m \text{ は整数}) \qquad \cdots(\alpha)$$

$n=k+1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 6^{2(k+1)}-1 = 6^{2k+2}-1 \\ &= 36\cdot 6^{2k}-1 \\ &= 36(7m+1)-1 \\ &= 36\cdot 7m+35 \end{aligned}$$

math-support.jp

$\boxed{\textbf{証明}}$ 命題「$P(n)=6^{2n}-1$ は 7 の倍数である」を証明する。

[2] $n=k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$P(k)=6^{2k}-1=7m \quad (m \text{ は整数}) \qquad \cdots(\alpha)$$

$n=k+1$ のとき、

$$\begin{aligned}P(k+1)&=6^{2(k+1)}-1 = 6^{2k+2}-1\\&=36\cdot 6^{2k}-1\\&=36(7m+1)-1\\&=36\cdot 7m+35\\&=7(36m+5)\end{aligned}$$

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$　命題「$P(n) = 6^{2n} - 1$ は 7 の倍数である」を証明する。

[2]　$n = k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 6^{2k} - 1 = 7m \quad (m \text{ は整数}) \qquad \cdots (\alpha)$$

$n = k+1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) = 6^{2(k+1)} - 1 \ &= 6^{2k+2} - 1 \\ &= 36 \cdot 6^{2k} - 1 \\ &= 36(7m+1) - 1 \\ &= 36 \cdot 7m + 35 \\ &= 7(36m+5) \end{aligned}$$

ここで $(36m+5)$ は整数だから、$P(k+1)$ は 7 の倍数。

したがって、$n = k+1$ のときも成立する。

証明　命題「$P(n)=6^{2n}-1$ は 7 の倍数である」を証明する。

[2]　$n=k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$P(k)=6^{2k}-1=7m \quad (m \text{ は整数}) \qquad \cdots(\alpha)$$

$n=k+1$ のとき、

$$\begin{aligned}P(k+1)=6^{2(k+1)}-1 &= 6^{2k+2}-1\\ &=36\cdot 6^{2k}-1\\ &=36(7m+1)-1\\ &=36\cdot 7m+35\\ &=7(36m+5)\end{aligned}$$

ここで $(36m+5)$ は整数だから、$P(k+1)$ は 7 の倍数。
したがって、$n=k+1$ のときも成立する。

[1], [2] より、全ての自然数において $P(n)$ は 7 の倍数である。

(2) $4^{n+1} + 9^n$ は 5 の倍数である。

(2) $4^{n+1}+9^n$ は 5 の倍数である。

$\boxed{\textbf{証明}}$　命題「$P(n)=4^{n+1}+9^n$ は 5 の倍数」を証明する。

(2) $4^{n+1}+9^n$ は 5 の倍数である。

$\boxed{\text{証明}}$　命題「$P(n)=4^{n+1}+9^n$ は 5 の倍数」を証明する。

[1]　$n=1$ のとき、

math-support.jp

(2) $4^{n+1}+9^n$ は 5 の倍数である。

$\boxed{\textbf{証明}}$　命題「$P(n)=4^{n+1}+9^n$ は 5 の倍数」を証明する。

[1]　$n=1$ のとき、

$$P(1)=4^2+9=25$$

math-support.jp

(2) $4^{n+1}+9^n$ は 5 の倍数である。

$\boxed{\text{証明}}$　命題「$P(n)=4^{n+1}+9^n$ は 5 の倍数」を証明する。

[1]　$n=1$ のとき、

$$P(1)=4^2+9=25$$

$\therefore$ 25 は、5 の倍数なので命題は成り立つ。

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$　命題「$P(n) = 4^{n+1} + 9^n$ は 5 の倍数」を証明する。

math-support.jp

$\boxed{\textbf{証明}}$ 命題「$P(n) = 4^{n+1} + 9^n$ は 5 の倍数」を証明する。

[2] $n = k$ のとき成り立つと仮定すると、

math-support.jp

証明 命題「$P(n) = 4^{n+1} + 9^n$ は 5 の倍数」を証明する。

[2] $n = k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 4^{k+1} + 9^k = 5m \quad (m \text{ は整数}) \qquad \cdots (\alpha)$$

math-support.jp

$\boxed{\textbf{証明}}$　命題「$P(n) = 4^{n+1} + 9^n$ は 5 の倍数」を証明する。

[2]　$n = k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 4^{k+1} + 9^k = 5m \quad (m \text{ は整数}) \qquad \cdots (\alpha)$$

$n = k + 1$ のとき、

math-support.jp

$\boxed{\textbf{証明}}$　命題「$P(n) = 4^{n+1} + 9^n$ は 5 の倍数」を証明する。

[2]　$n = k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 4^{k+1} + 9^k = 5m \quad (m \text{ は整数}) \qquad \cdots (\alpha)$$

$n = k + 1$ のとき、

$$P(k+1) = 4^{k+2} + 9^{k+1}$$

math-support.jp

$\boxed{\textbf{証明}}$ 命題「$P(n) = 4^{n+1} + 9^n$ は 5 の倍数」を証明する。

[2] $n = k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 4^{k+1} + 9^k = 5m \quad (m \text{ は整数}) \qquad \cdots(\alpha)$$

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 4^{k+2} + 9^{k+1} \\ &= 4 \cdot 4^{k+1} + 9^{k+1} \end{aligned}$$

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ 命題「$P(n) = 4^{n+1} + 9^n$ は 5 の倍数」を証明する。

[2] $n = k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 4^{k+1} + 9^k = 5m \quad (m \text{ は整数}) \qquad \cdots(\alpha)$$

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 4^{k+2} + 9^{k+1} \\ &= 4 \cdot 4^{k+1} + 9^{k+1} \\ &= 4 \cdot (5m - 9^k) + 9^{k+1} \end{aligned}$$

math-support.jp

証明 命題「$P(n) = 4^{n+1} + 9^n$ は 5 の倍数」を証明する。

[2] $n = k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 4^{k+1} + 9^k = 5m \quad (m \text{ は整数}) \qquad \cdots (\alpha)$$

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 4^{k+2} + 9^{k+1} \\ &= 4 \cdot 4^{k+1} + 9^{k+1} \\ &= 4 \cdot (5m - 9^k) + 9^{k+1} \\ &= 4 \cdot 5m - 4 \cdot 9^k + 9 \cdot 9^k \end{aligned}$$

math-support.jp

$\boxed{\textbf{証明}}$ 命題「$P(n) = 4^{n+1} + 9^n$ は 5 の倍数」を証明する。

[2] $n = k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 4^{k+1} + 9^k = 5m \quad (m \text{ は整数}) \qquad \cdots (\alpha)$$

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 4^{k+2} + 9^{k+1} \\ &= 4 \cdot 4^{k+1} + 9^{k+1} \\ &= 4 \cdot (5m - 9^k) + 9^{k+1} \\ &= 4 \cdot 5m - 4 \cdot 9^k + 9 \cdot 9^k \\ &= 4 \cdot 5m + 5 \cdot 9^k \end{aligned}$$

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ 命題「$P(n) = 4^{n+1} + 9^n$ は 5 の倍数」を証明する。

[2] $n = k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 4^{k+1} + 9^k = 5m \quad (m \text{ は整数}) \qquad \cdots(\alpha)$$

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 4^{k+2} + 9^{k+1} \\ &= 4 \cdot 4^{k+1} + 9^{k+1} \\ &= 4 \cdot (5m - 9^k) + 9^{k+1} \\ &= 4 \cdot 5m - 4 \cdot 9^k + 9 \cdot 9^k \\ &= 4 \cdot 5m + 5 \cdot 9^k \;= 5(4m + 9^k) \end{aligned}$$

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$　命題「$P(n) = 4^{n+1} + 9^n$ は 5 の倍数」を証明する。

[2]　$n = k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 4^{k+1} + 9^k = 5m \quad (m \text{ は整数}) \qquad \cdots(\alpha)$$

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 4^{k+2} + 9^{k+1} \\ &= 4 \cdot 4^{k+1} + 9^{k+1} \\ &= 4 \cdot (5m - 9^k) + 9^{k+1} \\ &= 4 \cdot 5m - 4 \cdot 9^k + 9 \cdot 9^k \\ &= 4 \cdot 5m + 5 \cdot 9^k \ = 5(4m + 9^k) \end{aligned}$$

ここで $(4m + 9^k)$ は整数だから、$P(k+1)$ は 5 の倍数である。

したがって、$n = k + 1$ のときも成立する。

math-support.jp

$\boxed{\text{証明}}$ 命題「$P(n) = 4^{n+1} + 9^n$ は 5 の倍数」を証明する。

[2] $n = k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$P(k) = 4^{k+1} + 9^k = 5m \quad (m \text{ は整数}) \qquad \cdots (\alpha)$$

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned}
P(k+1) &= 4^{k+2} + 9^{k+1} \\
&= 4 \cdot 4^{k+1} + 9^{k+1} \\
&= 4 \cdot (5m - 9^k) + 9^{k+1} \\
&= 4 \cdot 5m - 4 \cdot 9^k + 9 \cdot 9^k \\
&= 4 \cdot 5m + 5 \cdot 9^k \ = 5(4m + 9^k)
\end{aligned}$$

ここで $(4m + 9^k)$ は整数だから、$P(k+1)$ は 5 の倍数である。
したがって、$n = k + 1$ のときも成立する。

[1], [2] より、全ての自然数において $P(n)$ は 5 の倍数である。

math-support.jp

数学的帰納法以外の証明方法はあるのだろうか？

例 1　　$4n^3 - n$ は 3 の倍数

問 1　(1) $6^{2n} - 1$ は 7 の倍数である。

問 1　(2) $4^{n+1} + 9^n$ は 5 の倍数である。

math-support.jp

数学的帰納法以外の証明方法はあるのだろうか？

例 1　$4n^3 - n$ は 3 の倍数

$$= n(4n^2 - 1) = n(2n-1)(2n+1)$$

問 1　(1) $6^{2n} - 1$ は 7 の倍数である。

問 1　(2) $4^{n+1} + 9^n$ は 5 の倍数である。

math-support.jp

数学的帰納法以外の証明方法はあるのだろうか？

例 1 　$4n^3 - n$ は 3 の倍数

$$= n(4n^2 - 1) = n(2n - 1)(2n + 1)$$

問 1 　(1) $6^{2n} - 1$ は 7 の倍数である。

$$= (6^n - 1)(6^n + 1)$$

問 1 　(2) $4^{n+1} + 9^n$ は 5 の倍数である。

math-support.jp

今回の学習目標

数学的帰納法で $n = k$ のときの情報の活かし方

math-support.jp