数列の置き換え (4)

次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 5}$$

今回の学習目標

式の特徴を活かして、数列の置き換え

- 分数型漸化式の逆数変換

math-support.jp

漸化式の４つの型

$\boxed{1}$ 等差型： $a_{n+1} = a_n + d$

$\boxed{2}$ 等比型： $a_{n+1} = r \cdot a_n$

3 階差型： $a_{n+1} = a_n + f(n)$

4 一般型： $a_{n+1} = p\, a_n + q$

math-support.jp

例 1　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{3}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$$

math-support.jp

例 1　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{3}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$$

どのような数列になるのか漸化式から求めてみよう。

math-support.jp

例 1　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{3}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$$

どのような数列になるのか漸化式から求めてみよう。

$$a_2 = \frac{\frac{1}{3}}{2 \cdot \frac{1}{3} + 1}$$

math-support.jp

例 1　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{3}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$$

どのような数列になるのか漸化式から求めてみよう。

$$a_2 = \frac{\frac{1}{3}}{2 \cdot \frac{1}{3} + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}}$$

math-support.jp

例 1　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{3}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$$

どのような数列になるのか漸化式から求めてみよう。

$$a_2 = \frac{\frac{1}{3}}{2 \cdot \frac{1}{3} + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{5}$$

math-support.jp

$\boxed{例 1}$ 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{3}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$$

どのような数列になるのか漸化式から求めてみよう。

$$a_2 = \frac{\frac{1}{3}}{2 \cdot \frac{1}{3} + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{5}$$

$$a_3 = \frac{\frac{1}{5}}{2 \cdot \frac{1}{5} + 1}$$

math-support.jp

例 1　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{3}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$$

どのような数列になるのか漸化式から求めてみよう。

$$a_2 = \frac{\frac{1}{3}}{2 \cdot \frac{1}{3} + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{5}$$

$$a_3 = \frac{\frac{1}{5}}{2 \cdot \frac{1}{5} + 1} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}}$$

math-support.jp

例 1　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{3}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$$

どのような数列になるのか漸化式から求めてみよう。

$$a_2 = \frac{\frac{1}{3}}{2 \cdot \frac{1}{3} + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{5}$$

$$a_3 = \frac{\frac{1}{5}}{2 \cdot \frac{1}{5} + 1} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{1}{7}$$

math-support.jp

例 1　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{3}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$$

どのような数列になるのか漸化式から求めてみよう。

$$a_2 = \frac{\frac{1}{3}}{2 \cdot \frac{1}{3} + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{5}$$

$$a_3 = \frac{\frac{1}{5}}{2 \cdot \frac{1}{5} + 1} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{1}{7}$$

$$a_4 = \frac{\frac{1}{7}}{2 \cdot \frac{1}{7} + 1} \qquad \cdots$$

math-support.jp

例 1　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{3}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$$

どのような数列になるのか漸化式から求めてみよう。

$$a_2 = \frac{\frac{1}{3}}{2 \cdot \frac{1}{3} + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{5}$$

$$a_3 = \frac{\frac{1}{5}}{2 \cdot \frac{1}{5} + 1} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{1}{7}$$

$$a_4 = \frac{\frac{1}{7}}{2 \cdot \frac{1}{7} + 1} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{9}{7}} \qquad \cdots$$

math-support.jp

例 1 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{3}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$$

どのような数列になるのか漸化式から求めてみよう。

$$a_2 = \frac{\frac{1}{3}}{2 \cdot \frac{1}{3} + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{5}$$

$$a_3 = \frac{\frac{1}{5}}{2 \cdot \frac{1}{5} + 1} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{1}{7}$$

$$a_4 = \frac{\frac{1}{7}}{2 \cdot \frac{1}{7} + 1} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{9}{7}} = \frac{1}{9} \qquad \cdots$$

math-support.jp

例 1　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{3}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$$

math-support.jp

例 1　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{3}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$$

漸化式の逆数をとると、

math-support.jp

例 1　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{3}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$$

漸化式の逆数をとると、

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n + 1}{a_n}$$

math-support.jp

例 1　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{3}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$$

漸化式の逆数をとると、

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n + 1}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 2 + \frac{1}{a_n}$$

math-support.jp

例 1　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{3}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$$

漸化式の逆数をとると、

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n + 1}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 2 + \frac{1}{a_n}$$

ここで、$b_n = \frac{1}{a_n}$ とすると、

math-support.jp

例 1　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{3}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$$

漸化式の逆数をとると、

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n + 1}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 2 + \frac{1}{a_n}$$

ここで、$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とすると、

$$b_1 = 3, \qquad b_{n+1} = b_n + 2$$

math-support.jp

例 1　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{3}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$$

漸化式の逆数をとると、

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n + 1}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 2 + \frac{1}{a_n}$$

ここで、$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とすると、

$$b_1 = 3, \qquad b_{n+1} = b_n + 2$$

b_n は初項 3、公差 2 の等差数列

math-support.jp

例 1　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{3}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$$

漸化式の逆数をとると、

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n + 1}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 2 + \frac{1}{a_n}$$

ここで、$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とすると、

$$b_1 = 3, \qquad b_{n+1} = b_n + 2$$

b_n は初項 3、公差 2 の等差数列

$$b_n = 3 + 2(n-1)$$

math-support.jp

例 1　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{3}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$$

漸化式の逆数をとると、

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n + 1}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 2 + \frac{1}{a_n}$$

ここで、$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とすると、

$$b_1 = 3, \qquad b_{n+1} = b_n + 2$$

b_n は初項 3、公差 2 の等差数列

$$b_n = 3 + 2(n-1) = 2n + 1$$

math-support.jp

例 1　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{3}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$$

漸化式の逆数をとると、

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n + 1}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 2 + \frac{1}{a_n}$$

ここで、$b_n = \frac{1}{a_n}$ とすると、

$$b_1 = 3, \qquad b_{n+1} = b_n + 2$$

b_n は初項 3、公差 2 の等差数列

$$b_n = 3 + 2(n-1) = 2n + 1$$

$\boxed{\text{答}}$ $a_n = \dfrac{1}{2n+1}$

math-support.jp

ビデオを止めて問題を解いてみよう

問 1　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{5}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{3a_n + 1}$$

math-support.jp

問 1　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{5}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{3a_n + 1}$$

math-support.jp

問 1　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{5}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{3a_n + 1}$$

漸化式の逆数をとると、

math-support.jp

問 1　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{5}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{3a_n + 1}$$

漸化式の逆数をとると、

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3a_n + 1}{a_n}$$

math-support.jp

問 1　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{5}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{3a_n + 1}$$

漸化式の逆数をとると、

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3a_n + 1}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 3 + \frac{1}{a_n}$$

math-support.jp

問 1　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{5}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{3a_n + 1}$$

漸化式の逆数をとると、

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3a_n + 1}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 3 + \frac{1}{a_n}$$

ここで、$b_n = \frac{1}{a_n}$ とすると、

math-support.jp

問 1　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{5}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{3a_n + 1}$$

漸化式の逆数をとると、

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3a_n + 1}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 3 + \frac{1}{a_n}$$

ここで、$b_n = \frac{1}{a_n}$ とすると、

$$b_1 = 5, \qquad b_{n+1} = b_n + 3$$

math-support.jp

問 1　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{5}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{3a_n + 1}$$

漸化式の逆数をとると、

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3a_n + 1}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 3 + \frac{1}{a_n}$$

ここで、$b_n = \frac{1}{a_n}$ とすると、

$$b_1 = 5, \qquad b_{n+1} = b_n + 3$$

b_n は初項 5、 公差 3 の等差数列

math-support.jp

問 1 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{5}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{3a_n + 1}$$

漸化式の逆数をとると、

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3a_n + 1}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 3 + \frac{1}{a_n}$$

ここで、$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とすると、

$$b_1 = 5, \qquad b_{n+1} = b_n + 3$$

b_n は初項 5、 公差 3 の等差数列

$$b_n = 5 + 3(n-1)$$

math-support.jp

問 1　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{5}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{3a_n + 1}$$

漸化式の逆数をとると、

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3a_n + 1}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 3 + \frac{1}{a_n}$$

ここで、$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とすると、

$$b_1 = 5, \qquad b_{n+1} = b_n + 3$$

b_n は初項 5、 公差 3 の等差数列

$$b_n = 5 + 3(n-1) = 3n + 2$$

math-support.jp

問 1　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{5}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{3a_n + 1}$$

漸化式の逆数をとると、

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3a_n + 1}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 3 + \frac{1}{a_n}$$

ここで、$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とすると、

$$b_1 = 5, \qquad b_{n+1} = b_n + 3$$

b_n は初項 5、 公差 3 の等差数列

$$b_n = 5 + 3(n-1) = 3n + 2$$

$\boxed{答}$　$a_n = \dfrac{1}{3n+2}$

math-support.jp

例 2 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 5}$$

math-support.jp

例 2　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 5} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a_{n+1}} = 2 + \frac{5}{a_n}$$

math-support.jp

例 2　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 5} \quad \to \quad \frac{1}{a_{n+1}} = 2 + \frac{5}{a_n}$$

ここで、$b_n = \frac{1}{a_n}$ と置き換える。

例 2　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 5} \quad \to \quad \frac{1}{a_{n+1}} = 2 + \frac{5}{a_n}$$

ここで、$b_n = \frac{1}{a_n}$ と置き換える。

$$b_1 = \frac{1}{2}, \qquad b_{n+1} = 2 + 5b_n$$

math-support.jp

例 2 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 5} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a_{n+1}} = 2 + \frac{5}{a_n}$$

ここで、$b_n = \frac{1}{a_n}$ と置き換える。

$b_1 = \frac{1}{2}, \qquad b_{n+1} = 2 + 5b_n$

特性方程式は $c = 2 + 5c,$

math-support.jp

例 2 　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 5} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a_{n+1}} = 2 + \frac{5}{a_n}$$

ここで、$b_n = \frac{1}{a_n}$ と置き換える。

$$b_1 = \frac{1}{2}, \qquad b_{n+1} = 2 + 5b_n$$

特性方程式は $c = 2 + 5c$,

この解は $c = -\frac{1}{2}$

math-support.jp

例 2　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 5} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a_{n+1}} = 2 + \frac{5}{a_n}$$

ここで、$b_n = \frac{1}{a_n}$ と置き換える。

$$b_1 = \frac{1}{2}, \qquad b_{n+1} = 2 + 5b_n$$

特性方程式は $c = 2 + 5c$,

この解は $c = -\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{rrcl} & b_{n+1} & = & 2 + 5b_n \\ -) & c & = & 2 + 5c \\ \hline & b_{n+1} - c & = & 5(b_n - c) \end{array}$$

math-support.jp

例 2　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 5} \quad \to \quad \frac{1}{a_{n+1}} = 2 + \frac{5}{a_n}$$

ここで、$b_n = \frac{1}{a_n}$ と置き換える。

$d_n = b_n + \frac{1}{2}$ と置き換える。

$$b_1 = \frac{1}{2}, \qquad b_{n+1} = 2 + 5b_n$$

特性方程式は $c = 2 + 5c$,

この解は $c = -\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{rrl} & b_{n+1} &= 2 + 5b_n \\ -) & c &= 2 + 5c \\ \hline & b_{n+1} - c &= 5(b_n - c) \end{array}$$

math-support.jp

例 2　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 5} \quad \to \quad \frac{1}{a_{n+1}} = 2 + \frac{5}{a_n}$$

ここで、$b_n = \frac{1}{a_n}$ と置き換える。

$$b_1 = \frac{1}{2}, \qquad b_{n+1} = 2 + 5b_n$$

特性方程式は $c = 2 + 5c$,

この解は $c = -\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{rrl} & b_{n+1} &= 2 + 5b_n \\ -) & c &= 2 + 5c \\ \hline & b_{n+1} - c &= 5(b_n - c) \end{array}$$

$d_n = b_n + \frac{1}{2}$ と置き換える。

$$d_1 = 1, \qquad d_{n+1} = 5d_n$$

math-support.jp

$\boxed{例 2}$ 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 5} \quad \to \quad \frac{1}{a_{n+1}} = 2 + \frac{5}{a_n}$$

ここで、$b_n = \frac{1}{a_n}$ と置き換える。

$$b_1 = \frac{1}{2}, \qquad b_{n+1} = 2 + 5b_n$$

特性方程式は $c = 2 + 5c$,

この解は $c = -\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{rr} & b_{n+1} = 2 + 5b_n \\ -) & c = 2 + 5c \\ \hline & b_{n+1} - c = 5(b_n - c) \end{array}$$

$d_n = b_n + \frac{1}{2}$ と置き換える。

$d_1 = 1, \qquad d_{n+1} = 5d_n$

d_n は初項 1、公比 5 の等比数列

math-support.jp

例 2　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 5} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a_{n+1}} = 2 + \frac{5}{a_n}$$

ここで、$b_n = \frac{1}{a_n}$ と置き換える。

$b_1 = \frac{1}{2}, \qquad b_{n+1} = 2 + 5b_n$

特性方程式は $c = 2 + 5c$,

この解は $c = -\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{rl} b_{n+1} &= 2 + 5b_n \\ -) \qquad c &= 2 + 5c \\ \hline b_{n+1} - c &= 5(b_n - c) \end{array}$$

$d_n = b_n + \frac{1}{2}$ と置き換える。

$d_1 = 1, \qquad d_{n+1} = 5d_n$

d_n は初項 1、公比 5 の等比数列

$d_n = 5^{n-1}$

例 2　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 5} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a_{n+1}} = 2 + \frac{5}{a_n}$$

ここで、$b_n = \frac{1}{a_n}$ と置き換える。

$b_1 = \frac{1}{2}, \qquad b_{n+1} = 2 + 5b_n$

特性方程式は $c = 2 + 5c$,

この解は $c = -\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{rr} & b_{n+1} = 2 + 5b_n \\ -) & c = 2 + 5c \\ \hline & b_{n+1} - c = 5(b_n - c) \end{array}$$

$d_n = b_n + \frac{1}{2}$ と置き換える。

$d_1 = 1, \qquad d_{n+1} = 5d_n$

d_n は初項 1、公比 5 の等比数列

$d_n = 5^{n-1}$

$$b_n = 5^{n-1} - \frac{1}{2}$$

math-support.jp

例 2 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 5} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a_{n+1}} = 2 + \frac{5}{a_n}$$

ここで、$b_n = \frac{1}{a_n}$ と置き換える。

$b_1 = \frac{1}{2}, \qquad b_{n+1} = 2 + 5b_n$

特性方程式は $c = 2 + 5c,$

この解は $c = -\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{rl} b_{n+1} &= 2 + 5b_n \\ -) \qquad c &= 2 + 5c \\ \hline b_{n+1} - c &= 5(b_n - c) \end{array}$$

$d_n = b_n + \frac{1}{2}$ と置き換える。

$d_1 = 1, \qquad d_{n+1} = 5d_n$

d_n は初項 1、公比 5 の等比数列

$d_n = 5^{n-1}$

$$b_n = 5^{n-1} - \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 5^{n-1} - 1}{2}$$

math-support.jp

$\boxed{\text{例 2}}$ 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 5} \quad \to \quad \frac{1}{a_{n+1}} = 2 + \frac{5}{a_n}$$

ここで、$b_n = \frac{1}{a_n}$ と置き換える。

$$b_1 = \frac{1}{2}, \quad b_{n+1} = 2 + 5b_n$$

特性方程式は $c = 2 + 5c$,

この解は $c = -\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{rrl} & b_{n+1} &= 2 + 5b_n \\ -) & c &= 2 + 5c \\ \hline & b_{n+1} - c &= 5(b_n - c) \end{array}$$

$d_n = b_n + \frac{1}{2}$ と置き換える。

$$d_1 = 1, \quad d_{n+1} = 5d_n$$

d_n は初項 1、公比 5 の等比数列

$$d_n = 5^{n-1}$$

$$b_n = 5^{n-1} - \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 5^{n-1} - 1}{2}$$

$\boxed{\text{答}}$ $a_n = \dfrac{2}{2 \cdot 5^{n-1} - 1}$

math-support.jp

ビデオを止めて問題を解いてみよう

問 2　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{8a_n - 3}$$

math-support.jp

問 2　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{8a_n - 3}$$

math-support.jp

問 2　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{8a_n - 3} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a_{n+1}} = 8 - \frac{3}{a_n}$$

math-support.jp

問 2　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{8a_n - 3} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a_{n+1}} = 8 - \frac{3}{a_n}$$

ここで、$b_n = \frac{1}{a_n}$ と置き換える

math-support.jp

問 2　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{8a_n - 3} \quad \to \quad \frac{1}{a_{n+1}} = 8 - \frac{3}{a_n}$$

ここで、$b_n = \frac{1}{a_n}$ と置き換える

$$b_1 = 1, \qquad b_{n+1} = 8 - 3b_n$$

math-support.jp

問 2　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{8a_n - 3} \quad \to \quad \frac{1}{a_{n+1}} = 8 - \frac{3}{a_n}$$

ここで、$b_n = \frac{1}{a_n}$ と置き換える

$$b_1 = 1, \qquad b_{n+1} = 8 - 3b_n$$

特性方程式は $c = 8 - 3c$、

math-support.jp

問 2　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{8a_n - 3} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a_{n+1}} = 8 - \frac{3}{a_n}$$

ここで、$b_n = \frac{1}{a_n}$ と置き換える

$$b_1 = 1, \qquad b_{n+1} = 8 - 3b_n$$

特性方程式は $c = 8 - 3c$、

この解は $c = 2$

問 2 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{8a_n - 3} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a_{n+1}} = 8 - \frac{3}{a_n}$$

ここで、$b_n = \frac{1}{a_n}$ と置き換える

$$b_1 = 1, \qquad b_{n+1} = 8 - 3b_n$$

特性方程式は $c = 8 - 3c$、

この解は $c = 2$

$$\begin{array}{rl} b_{n+1} & = 8 - 3b_n \\ -) \quad c & = 8 - 3c \\ \hline b_{n+1} - c & = -3(b_n - c) \end{array}$$

math-support.jp

問 2 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{8a_n - 3} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a_{n+1}} = 8 - \frac{3}{a_n}$$

ここで、$b_n = \frac{1}{a_n}$ と置き換える

$d_n = b_n - 2$ と置き換える。

$b_1 = 1, \qquad b_{n+1} = 8 - 3b_n$

特性方程式は $c = 8 - 3c$、

この解は $c = 2$

$$\begin{array}{rrl} & b_{n+1} & = 8 - 3b_n \\ -) & c & = 8 - 3c \\ \hline \multicolumn{3}{l}{b_{n+1} - c = -3(b_n - c)} \end{array}$$

math-support.jp

問 2 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{8a_n - 3} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a_{n+1}} = 8 - \frac{3}{a_n}$$

ここで、$b_n = \frac{1}{a_n}$ と置き換える

$$b_1 = 1, \qquad b_{n+1} = 8 - 3b_n$$

特性方程式は $c = 8 - 3c$、

この解は $c = 2$

$$\begin{array}{rrl} & b_{n+1} & = 8 - 3b_n \\ -) & c & = 8 - 3c \\ \hline & b_{n+1} - c & = -3(b_n - c) \end{array}$$

$d_n = b_n - 2$ と置き換える。

$$d_1 = -1, \qquad d_{n+1} = -3d_n$$

math-support.jp

問 2　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{8a_n - 3} \quad \to \quad \frac{1}{a_{n+1}} = 8 - \frac{3}{a_n}$$

ここで、$b_n = \frac{1}{a_n}$ と置き換える

$b_1 = 1, \qquad b_{n+1} = 8 - 3b_n$

特性方程式は $c = 8 - 3c$、

この解は $c = 2$

$$\begin{array}{rrcl} & b_{n+1} & = & 8 - 3b_n \\ -) & c & = & 8 - 3c \\ \hline & b_{n+1} - c & = & -3(b_n - c) \end{array}$$

$d_n = b_n - 2$ と置き換える。

$d_1 = -1, \qquad d_{n+1} = -3d_n$

初項 -1、公比 -3 の等比数列

math-support.jp

問 2 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{8a_n - 3} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a_{n+1}} = 8 - \frac{3}{a_n}$$

ここで、$b_n = \frac{1}{a_n}$ と置き換える

$b_1 = 1, \qquad b_{n+1} = 8 - 3b_n$

特性方程式は $c = 8 - 3c$、

この解は $c = 2$

$$\begin{array}{rl} b_{n+1} & = 8 - 3b_n \\ -) \quad c & = 8 - 3c \\ \hline b_{n+1} - c & = -3(b_n - c) \end{array}$$

$d_n = b_n - 2$ と置き換える。

$d_1 = -1, \qquad d_{n+1} = -3d_n$

初項 -1、公比 -3 の等比数列

$d_n = -(-3)^{n-1}$

math-support.jp

問 2　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{8a_n - 3} \quad \to \quad \frac{1}{a_{n+1}} = 8 - \frac{3}{a_n}$$

ここで、$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ と置き換える

$$b_1 = 1, \qquad b_{n+1} = 8 - 3b_n$$

特性方程式は $c = 8 - 3c$、

この解は $c = 2$

$$\begin{array}{rrl} & b_{n+1} & = 8 - 3b_n \\ -) & c & = 8 - 3c \\ \hline & b_{n+1} - c & = -3(b_n - c) \end{array}$$

$d_n = b_n - 2$ と置き換える。

$$d_1 = -1, \qquad d_{n+1} = -3d_n$$

初項 -1、公比 -3 の等比数列

$$d_n = -(-3)^{n-1}$$

$$b_n = -(-3)^{n-1} + 2$$

math-support.jp

問 2 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{8a_n - 3} \quad \to \quad \frac{1}{a_{n+1}} = 8 - \frac{3}{a_n}$$

ここで、$b_n = \frac{1}{a_n}$ と置き換える

$$b_1 = 1, \qquad b_{n+1} = 8 - 3b_n$$

特性方程式は $c = 8 - 3c$、

この解は $c = 2$

$$\begin{array}{rl} b_{n+1} & = 8 - 3b_n \\ -) \quad c & = 8 - 3c \\ \hline b_{n+1} - c & = -3(b_n - c) \end{array}$$

$d_n = b_n - 2$ と置き換える。

$$d_1 = -1, \qquad d_{n+1} = -3d_n$$

初項 -1、公比 -3 の等比数列

$$d_n = -(-3)^{n-1}$$

$$b_n = -(-3)^{n-1} + 2$$

$\boxed{答}$ $\quad a_n = -\dfrac{1}{(-3)^{n-1} - 2}$

math-support.jp

今回の学習目標

式の特徴を活かして、数列の置き換え

- 分数型漸化式の逆数変換

math-support.jp