

数列

漸化式：関連問題

数列の置き換え (1)

数列 $\{a_n\}$ の一般項を， $[\quad]$ 内のように置き換えることによって一般項を求めよ。

$$a_1 = 12, \quad \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} - 3 \quad \left[\frac{a_n}{2^n} = b_n \right]$$



今回の学習目標

数列を置き換えることにより、漸化式から一般項

漸化式の4つの型



漸化式の4つの型

① 等差型： $a_{n+1} = a_n + d$



漸化式の4つの型

① 等差型： $a_{n+1} = a_n + d$

② 等比型： $a_{n+1} = r \cdot a_n$



漸化式の4つの型

- 1 等差型 : $a_{n+1} = a_n + d$
- 2 等比型 : $a_{n+1} = r \cdot a_n$
- 3 階差型 : $a_{n+1} = a_n + f(n)$

漸化式の4つの型

1 等差型 : $a_{n+1} = a_n + d$

2 等比型 : $a_{n+1} = r \cdot a_n$

3 階差型 : $a_{n+1} = a_n + f(n)$

4 一般型 : $a_{n+1} = p a_n + q$



例 1

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を，
[] 内のように置き換えることによって求めよ。

$$(1) \quad a_1 = 9, \quad \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n} - 2$$

$$(2) \quad a_1 = 5, \quad na_{n+1} = 2(n+1)a_n$$



例 1

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を,
[] 内のように置き換えることによって求めよ。

$$(1) \quad a_1 = 9, \quad \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n} - 2 \quad \left[\frac{a_n}{3^n} = b_n \right]$$

$$(2) \quad a_1 = 5, \quad na_{n+1} = 2(n+1)a_n \quad \left[\frac{a_n}{n} = b_n \right]$$



例 1

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を, $[]$ 内の
ように置き換えることによって求めよ。

$$(1) \quad a_1 = 9, \quad \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n} - 2 \quad \left[\frac{a_n}{3^n} = b_n \right]$$



例 1

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を, $[]$ 内の
ように置き換えることによって求めよ。

$$(1) \quad a_1 = 9, \quad \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n} - 2 \quad \left[\frac{a_n}{3^n} = b_n \right]$$

$b_n = \frac{a_n}{3^n}$ と置き換える。



例 1

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を, $[]$ 内の
ように置き換えることによって求めよ。

$$(1) \quad a_1 = 9, \quad \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n} - 2 \quad \left[\frac{a_n}{3^n} = b_n \right]$$

$b_n = \frac{a_n}{3^n}$ と置き換える。

$$b_1 = \frac{a_1}{3^1} = 3$$



例 1

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を, $[]$ 内の
ように置き換えることによって求めよ。

$$(1) \quad a_1 = 9, \quad \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n} - 2 \quad \left[\frac{a_n}{3^n} = b_n \right]$$

$b_n = \frac{a_n}{3^n}$ と置き換える。

$$b_1 = \frac{a_1}{3^1} = 3 \qquad b_{n+1} = b_n - 2$$



例 1

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を, $[]$ 内の
ように置き換えることによって求めよ。

$$(1) \quad a_1 = 9, \quad \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n} - 2 \quad \left[\frac{a_n}{3^n} = b_n \right]$$

$b_n = \frac{a_n}{3^n}$ と置き換える。

$$b_1 = \frac{a_1}{3^1} = 3 \qquad b_{n+1} = b_n - 2$$

$\{b_n\}$ は初項 3、公差 -2 の等差数列であるから、



例 1

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を, $[]$ 内の
ように置き換えることによって求めよ。

$$(1) \quad a_1 = 9, \quad \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n} - 2 \quad \left[\frac{a_n}{3^n} = b_n \right]$$

$b_n = \frac{a_n}{3^n}$ と置き換える。

$$b_1 = \frac{a_1}{3^1} = 3 \qquad b_{n+1} = b_n - 2$$

$\{b_n\}$ は初項 3、公差 -2 の等差数列であるから、

$$b_n = 3 - 2(n - 1)$$



例 1

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を, $[]$ 内の
ように置き換えることによって求めよ。

$$(1) \quad a_1 = 9, \quad \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n} - 2 \quad \left[\frac{a_n}{3^n} = b_n \right]$$

$b_n = \frac{a_n}{3^n}$ と置き換える。

$$b_1 = \frac{a_1}{3^1} = 3 \qquad b_{n+1} = b_n - 2$$

$\{b_n\}$ は初項 3、公差 -2 の等差数列であるから、

$$\begin{aligned} b_n &= 3 - 2(n - 1) \\ &= -2n + 5 \end{aligned}$$



例 1

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を, $[]$ 内の
ように置き換えることによって求めよ。

$$(1) \quad a_1 = 9, \quad \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n} - 2 \quad \left[\frac{a_n}{3^n} = b_n \right]$$

$b_n = \frac{a_n}{3^n}$ と置き換える。

$$b_1 = \frac{a_1}{3^1} = 3 \qquad b_{n+1} = b_n - 2$$

$\{b_n\}$ は初項 3、公差 -2 の等差数列であるから、

$$\begin{aligned} b_n &= 3 - 2(n - 1) \\ &= -2n + 5 \end{aligned}$$

$$a_n = b_n \cdot 3^n$$



例 1

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を, $[]$ 内の
ように置き換えることによって求めよ。

$$(1) \quad a_1 = 9, \quad \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n} - 2 \quad \left[\frac{a_n}{3^n} = b_n \right]$$

$b_n = \frac{a_n}{3^n}$ と置き換える。

$$b_1 = \frac{a_1}{3^1} = 3 \qquad b_{n+1} = b_n - 2$$

$\{b_n\}$ は初項 3、公差 -2 の等差数列であるから、

$$\begin{aligned} b_n &= 3 - 2(n - 1) \\ &= -2n + 5 \end{aligned}$$

$$a_n = b_n \cdot 3^n = (-2n + 5) \cdot 3^n$$

例 1

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を, $[]$ 内の
ように置き換えることによって求めよ。

$$(1) \quad a_1 = 9, \quad \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n} - 2 \quad \left[\frac{a_n}{3^n} = b_n \right]$$

$b_n = \frac{a_n}{3^n}$ と置き換える。

$$b_1 = \frac{a_1}{3^1} = 3 \quad b_{n+1} = b_n - 2$$

$\{b_n\}$ は初項 3、公差 -2 の等差数列であるから、

$$\begin{aligned} b_n &= 3 - 2(n - 1) \\ &= -2n + 5 \end{aligned}$$

$$a_n = b_n \cdot 3^n = (-2n + 5) \cdot 3^n$$

$$\boxed{\text{答}} \quad a_n = (-2n + 5) \cdot 3^n$$



$$(2) \quad a_1 = 5, \quad na_{n+1} = 2(n+1)a_n \quad \left[\frac{a_n}{n} = b_n \right]$$

$$(2) \quad a_1 = 5, \quad na_{n+1} = 2(n+1)a_n \quad \left[\frac{a_n}{n} = b_n \right]$$

漸化式の両辺を $n(n+1)$ で割ると、

$$(2) \quad a_1 = 5, \quad na_{n+1} = 2(n+1)a_n \quad \left[\frac{a_n}{n} = b_n \right]$$

漸化式の両辺を $n(n+1)$ で割ると、

$$\frac{na_{n+1}}{n(n+1)} = \frac{2(n+1)a_n}{n(n+1)}$$

$$(2) \quad a_1 = 5, \quad na_{n+1} = 2(n+1)a_n \quad \left[\frac{a_n}{n} = b_n \right]$$

漸化式の両辺を $n(n+1)$ で割ると、

$$\frac{na_{n+1}}{n(n+1)} = \frac{2(n+1)a_n}{n(n+1)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{2a_n}{n}$$

$$(2) \quad a_1 = 5, \quad na_{n+1} = 2(n+1)a_n \quad \left[\frac{a_n}{n} = b_n \right]$$

漸化式の両辺を $n(n+1)$ で割ると、

$$\frac{na_{n+1}}{n(n+1)} = \frac{2(n+1)a_n}{n(n+1)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{2a_n}{n}$$

ここで、 $b_n = \frac{a_n}{n}$ と置き換えると、

$$(2) \quad a_1 = 5, \quad na_{n+1} = 2(n+1)a_n \quad \left[\frac{a_n}{n} = b_n \right]$$

漸化式の両辺を $n(n+1)$ で割ると、

$$\frac{na_{n+1}}{n(n+1)} = \frac{2(n+1)a_n}{n(n+1)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{2a_n}{n}$$

ここで、 $b_n = \frac{a_n}{n}$ と置き換えると、

$$b_1 = \frac{a_1}{1} = 5、$$

$$(2) \quad a_1 = 5, \quad na_{n+1} = 2(n+1)a_n \quad \left[\frac{a_n}{n} = b_n \right]$$

漸化式の両辺を $n(n+1)$ で割ると、

$$\frac{na_{n+1}}{n(n+1)} = \frac{2(n+1)a_n}{n(n+1)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{2a_n}{n}$$

ここで、 $b_n = \frac{a_n}{n}$ と置き換えると、

$$b_1 = \frac{a_1}{1} = 5, \quad b_{n+1} = 2b_n$$



$$(2) \quad a_1 = 5, \quad na_{n+1} = 2(n+1)a_n \quad \left[\frac{a_n}{n} = b_n \right]$$

漸化式の両辺を $n(n+1)$ で割ると、

$$\frac{na_{n+1}}{n(n+1)} = \frac{2(n+1)a_n}{n(n+1)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{2a_n}{n}$$

ここで、 $b_n = \frac{a_n}{n}$ と置き換えると、

$$b_1 = \frac{a_1}{1} = 5, \quad b_{n+1} = 2b_n$$

$\{b_n\}$ は初項 5 , 公比 2 の等比数列だから、

$$(2) \quad a_1 = 5, \quad na_{n+1} = 2(n+1)a_n \quad \left[\frac{a_n}{n} = b_n \right]$$

漸化式の両辺を $n(n+1)$ で割ると、

$$\frac{na_{n+1}}{n(n+1)} = \frac{2(n+1)a_n}{n(n+1)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{2a_n}{n}$$

ここで、 $b_n = \frac{a_n}{n}$ と置き換えると、

$$b_1 = \frac{a_1}{1} = 5, \quad b_{n+1} = 2b_n$$

$\{b_n\}$ は初項 5 , 公比 2 の等比数列だから、 $b_n = 5 \cdot 2^{n-1}$



$$(2) \quad a_1 = 5, \quad na_{n+1} = 2(n+1)a_n \quad \left[\frac{a_n}{n} = b_n \right]$$

漸化式の両辺を $n(n+1)$ で割ると、

$$\frac{na_{n+1}}{n(n+1)} = \frac{2(n+1)a_n}{n(n+1)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{2a_n}{n}$$

ここで、 $b_n = \frac{a_n}{n}$ と置き換えると、

$$b_1 = \frac{a_1}{1} = 5, \quad b_{n+1} = 2b_n$$

$\{b_n\}$ は初項 5 , 公比 2 の等比数列だから、 $b_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

$$\boxed{\text{答}} \quad a_n = 5n \cdot 2^{n-1}$$



ビデオを止めて問題を解いてみよう

問 1 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を，
[] 内のように置き換えることによって求めよ。

$$(1) \ a_1 = 12, \quad \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} - 3 \quad \left[\frac{a_n}{2^n} = b_n \right]$$

$$(2) \ a_1 = 4, \quad 2na_{n+1} = 5(n+1)a_n \quad \left[\frac{a_n}{n} = b_n \right]$$



問 1

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を, $[\quad]$ 内の
ように置き換えることによって求めよ。

$$(1) \ a_1 = 12, \quad \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} - 3 \quad \left[\frac{a_n}{2^n} = b_n \right]$$



問 1

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を, [] 内の
ように置き換えることによって求めよ。

$$(1) \ a_1 = 12, \quad \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} - 3 \quad \left[\frac{a_n}{2^n} = b_n \right]$$

$$b_n = \frac{a_n}{2^n} \text{ と置き換える}$$



問 1

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を, [] 内の
ように置き換えることによって求めよ。

$$(1) \ a_1 = 12, \quad \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} - 3 \quad \left[\frac{a_n}{2^n} = b_n \right]$$

$$b_n = \frac{a_n}{2^n} \text{ と置き換える}$$

$$b_1 = \frac{a_1}{2^1} = 6,$$



問 1

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を, [] 内の
ように置き換えることによって求めよ。

$$(1) \ a_1 = 12, \quad \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} - 3 \quad \left[\frac{a_n}{2^n} = b_n \right]$$

$$b_n = \frac{a_n}{2^n} \text{ と置き換える}$$

$$b_1 = \frac{a_1}{2^1} = 6, \quad b_{n+1} = b_n - 3$$



問 1

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を, [] 内の
ように置き換えることによって求めよ。

$$(1) \ a_1 = 12, \quad \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} - 3 \quad \left[\frac{a_n}{2^n} = b_n \right]$$

$b_n = \frac{a_n}{2^n}$ と置き換える

$$b_1 = \frac{a_1}{2^1} = 6, \quad b_{n+1} = b_n - 3$$

$\{b_n\}$ は初項 6, 公差 -3 の等差数列であるから



問 1

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を, [] 内の
ように置き換えることによって求めよ。

$$(1) \ a_1 = 12, \quad \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} - 3 \quad \left[\frac{a_n}{2^n} = b_n \right]$$

$b_n = \frac{a_n}{2^n}$ と置き換える

$$b_1 = \frac{a_1}{2^1} = 6, \quad b_{n+1} = b_n - 3$$

$\{b_n\}$ は初項 6, 公差 -3 の等差数列であるから

$$b_n = 6 - 3(n - 1) = -3n + 9$$



問 1

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を, [] 内の
ように置き換えることによって求めよ。

$$(1) \ a_1 = 12, \quad \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} - 3 \quad \left[\frac{a_n}{2^n} = b_n \right]$$

$b_n = \frac{a_n}{2^n}$ と置き換える

$$b_1 = \frac{a_1}{2^1} = 6, \quad b_{n+1} = b_n - 3$$

$\{b_n\}$ は初項 6, 公差 -3 の等差数列であるから

$$b_n = 6 - 3(n - 1) = -3n + 9$$

$$\boxed{\text{答}} \quad a_n = (-3n + 9) \cdot 2^n$$



$$(2) \ a_1 = 4, \quad 2na_{n+1} = 5(n+1)a_n \quad \left[\frac{a_n}{n} = b_n \right]$$

$$(2) \ a_1 = 4, \quad 2na_{n+1} = 5(n+1)a_n \quad \left[\frac{a_n}{n} = b_n \right]$$

漸化式の両辺を $2n(n+1)$ で割ると、



$$(2) \ a_1 = 4, \quad 2na_{n+1} = 5(n+1)a_n \quad \left[\frac{a_n}{n} = b_n \right]$$

漸化式の両辺を $2n(n+1)$ で割ると、

$$\frac{2n a_{n+1}}{2n(n+1)} = \frac{5(n+1) a_n}{2n(n+1)}$$

$$(2) \ a_1 = 4, \quad 2na_{n+1} = 5(n+1)a_n \quad \left[\frac{a_n}{n} = b_n \right]$$

漸化式の両辺を $2n(n+1)$ で割ると、

$$\frac{2n a_{n+1}}{2n(n+1)} = \frac{5(n+1) a_n}{2n(n+1)} \quad \rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{5a_n}{2n}$$

$$(2) \ a_1 = 4, \quad 2na_{n+1} = 5(n+1)a_n \quad \left[\frac{a_n}{n} = b_n \right]$$

漸化式の両辺を $2n(n+1)$ で割ると、

$$\frac{2n a_{n+1}}{2n(n+1)} = \frac{5(n+1) a_n}{2n(n+1)} \quad \rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{5a_n}{2n}$$

$b_n = \frac{a_n}{n}$ と置き換える。



$$(2) \ a_1 = 4, \quad 2na_{n+1} = 5(n+1)a_n \quad \left[\frac{a_n}{n} = b_n \right]$$

漸化式の両辺を $2n(n+1)$ で割ると、

$$\frac{2n a_{n+1}}{2n(n+1)} = \frac{5(n+1) a_n}{2n(n+1)} \quad \rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{5a_n}{2n}$$

$b_n = \frac{a_n}{n}$ と置き換える。

$$b_1 = \frac{a_1}{1} = 4$$

$$(2) \ a_1 = 4, \quad 2na_{n+1} = 5(n+1)a_n \quad \left[\frac{a_n}{n} = b_n \right]$$

漸化式の両辺を $2n(n+1)$ で割ると、

$$\frac{2n a_{n+1}}{2n(n+1)} = \frac{5(n+1) a_n}{2n(n+1)} \quad \rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{5a_n}{2n}$$

$b_n = \frac{a_n}{n}$ と置き換える。

$$b_1 = \frac{a_1}{1} = 4 \quad b_{n+1} = \frac{5}{2}b_n$$

$$(2) \ a_1 = 4, \quad 2na_{n+1} = 5(n+1)a_n \quad \left[\frac{a_n}{n} = b_n \right]$$

漸化式の両辺を $2n(n+1)$ で割ると、

$$\frac{2n a_{n+1}}{2n(n+1)} = \frac{5(n+1) a_n}{2n(n+1)} \quad \rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{5a_n}{2n}$$

$b_n = \frac{a_n}{n}$ と置き換える。

$$b_1 = \frac{a_1}{1} = 4 \quad b_{n+1} = \frac{5}{2}b_n$$

$\{b_n\}$ は初項 4、公比 $\frac{5}{2}$ の等比数列だから

$$(2) \ a_1 = 4, \quad 2na_{n+1} = 5(n+1)a_n \quad \left[\frac{a_n}{n} = b_n \right]$$

漸化式の両辺を $2n(n+1)$ で割ると、

$$\frac{2n a_{n+1}}{2n(n+1)} = \frac{5(n+1) a_n}{2n(n+1)} \quad \rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{5a_n}{2n}$$

$b_n = \frac{a_n}{n}$ と置き換える。

$$b_1 = \frac{a_1}{1} = 4 \quad b_{n+1} = \frac{5}{2}b_n$$

$\{b_n\}$ は初項 4、公比 $\frac{5}{2}$ の等比数列だから $b_n = 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}$

$$(2) \ a_1 = 4, \quad 2na_{n+1} = 5(n+1)a_n \quad \left[\frac{a_n}{n} = b_n \right]$$

漸化式の両辺を $2n(n+1)$ で割ると、

$$\frac{2na_{n+1}}{2n(n+1)} = \frac{5(n+1)a_n}{2n(n+1)} \quad \rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{5a_n}{2n}$$

$b_n = \frac{a_n}{n}$ と置き換える。

$$b_1 = \frac{a_1}{1} = 4 \quad b_{n+1} = \frac{5}{2}b_n$$

$\{b_n\}$ は初項 4、公比 $\frac{5}{2}$ の等比数列だから $b_n = 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}$

$$\boxed{\text{答}} \quad a_n = 4n \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}$$

今回の学習目標

数列を置き換えることにより、漸化式から一般項