例 1　n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

解説　与式が表しているのは、次のような複数の等式

$n=1$ のとき、　$1=\frac{1}{2}\cdot 1(3\cdot 1-1)$

$n=2$ のとき、　$1+4=\frac{1}{2}\cdot 2(3\cdot 2-1)$

$n=3$ のとき、　$1+4+7=\frac{1}{2}\cdot 3(3\cdot 3-1)$

$n=4$ のとき、　$1+4+7+10=\frac{1}{2}\cdot 4(3\cdot 4-1)$

⋮　　⋮

これら無限の等式を全て証明することは不可能なので、
[1]　まず $n=1$ のとき成り立つことを証明する。
[2]　$n=k$ のとき成り立つと仮定して、
　$n=k+1$ のとき成り立つことを証明する。
上記、[1] [2] が成り立てば、全ての n で成り立つ。

証明

問 1　n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

(1)　$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$

(2)　$1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 5+\cdots+n(2n-1)=\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

証明

++*+*+*+*+*+*+ **【解答】** *+*+*+*+*+*+*+*+

例 1　n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

証明

[1] $n=1$ のとき、

(左辺) $=1$

(右辺) $=\frac{1}{2}\cdot 1(3\cdot 1-1)=1$

よって、(左辺)=(右辺) が成り立つ。

[2] $n=k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$1+4+7+\cdots+(3k-2)=\frac{1}{2}k(3k-1)$$

が成り立つ。

$n=k+1$ のとき、

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=1+4+7+\cdots+(3k-2)+(3k+1)\\&=\frac{1}{2}k(3k-1)+\frac{2}{2}(3k+1)\\&=\frac{1}{2}\left(3k^2-k+6k+2\right)\\&=\frac{1}{2}\left(3k^2+5k+2\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=\frac{1}{2}(k+1)\left\{3(k+1)-1\right\}\\&=\frac{1}{2}(k+1)(3k+2)\\&=\frac{1}{2}(3k^2+5k+2)\end{aligned}$$

$n=k+1$ のときも、(左辺)=(右辺) が成り立つ。

[1] **[2]** より、全ての自然数について、与式が成り立つ。

問 1　n は自然数とする。数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

(1)　$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$

[1]　$n=1$ のとき、

(左辺) $=1$

(右辺) $=\frac{1}{3}\cdot 1(2\cdot 1-1)(2\cdot 1+1)=1$

よって、(左辺)=(右辺) が成り立つ。

[2] $n=k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2=\frac{1}{3}k(2k-1)(2k+1)$$

$n=k+1$ のとき、

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2\\&=\frac{1}{3}k(2k-1)(2k+1)+\frac{3}{3}(2k+1)(2k+1)\\&=\frac{1}{3}(2k+1)\left\{2k^2-k+6k+3\right\}\\&=\frac{1}{3}(2k+1)(2k^2+5k+3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=\frac{1}{3}(k+1)\left\{2(k+1)-1\right\}\left\{2(k+1)+1\right\}\\&=\frac{1}{3}(k+1)(2k+1)(2k+3)\\&=\frac{1}{3}(2k+1)(2k^2+5k+3)\end{aligned}$$

$n=k+1$ のときも、(左辺)=(右辺) が成り立つ。

[1] **[2]** より、全ての自然数について、与式が成り立つ。

- -

(2)　$1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 5+\cdots+n(2n-1)=\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

[1] $n=1$ のとき、

(左辺) $=1$

(右辺) $=\frac{1}{6}\cdot 1(1+1)(4\cdot 1-1)=1$

よって、(左辺)=(右辺) が成り立つ。

[2] $n=k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 5+\cdots+k(2k-1)=\frac{1}{6}k(k+1)(4k-1)$$

$n=k+1$ のとき、

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=1\cdot 1+\cdots+k(2k-1)+(k+1)(2k+1)\\&=\frac{1}{6}k(k+1)(4k-1)+\frac{6}{6}(k+1)(2k+1)\\&=\frac{1}{6}(k+1)\{4k^2-k+12k+6\}\\&=\frac{1}{6}(k+1)(4k^2+11k+6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=\frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{4(k+1)-1\}\\&=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(4k+3)\\&=\frac{1}{6}(k+1)(4k^2+11k+6)\end{aligned}$$

$n=k+1$ のときも、(左辺)=(右辺) が成り立つ。

[1] **[2]** より、全ての自然数について、与式が成り立つ。