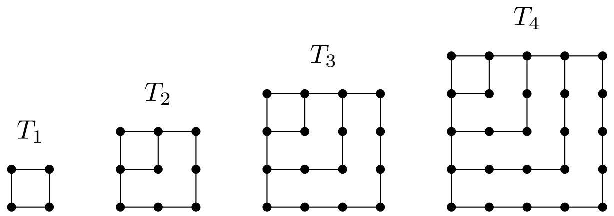
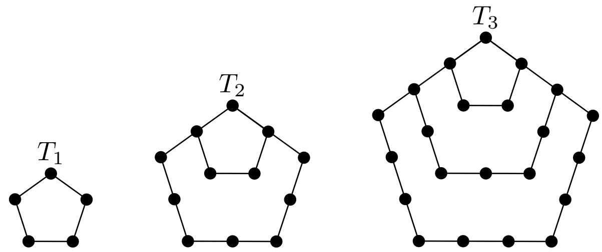
例 1　平面上に n 本の直線があって、どの 2 本も平行ではなく、またどの 3 本も同一の点で交わらない。このとき、これらの直線の交点の総数 a_n を求めよ。

問 1　平面上に n 個の円があって，どの 2 つの円も異なる 2 点で交わり，また，どの 3 つの円も同一の点で交わっていない．このとき，これらの円の交点の総数 a_n を求めよ。

例 2　図のように正方形の辺に点が並んでおり、次々に辺の長さを大きくした図形を重ねる。一番外側の正方形の辺の長さが n の図形を T_n、そのときの点の数を a_n とする。a_n と a_{n-1} の関係を表す漸化式を求めよ。



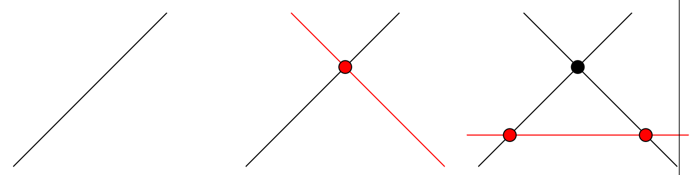
問 2　図のように，正五角形の辺に点が並んでおり，次々と辺の長さを大きくした図形を重ね，一番外側の正五角形の辺の長さが n の図形を T_n，そのときの点の数を a_n とする。a_n と a_{n-1} の関係を表す漸化式を求めよ。



++*+*+*+*+*+*+ **【解答】** *+*+*+*+*+*+*+*+

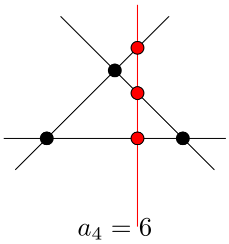
例 1　平面上に n 本の直線があって、どの 2 本も平行ではなく、またどの 3 本も同一の点で交わらない。このとき、これらの直線の交点の総数 a_n を求めよ。

$n=1$　　$n=2$　　$n=3$



$a_1=0$　　$a_2=1$　　$a_3=3$

$n=4$



$a_4=6$

直線が 1 本しかないとき、$a_1=0$ である。
直線が n 本あるときの交点の総数は a_n であり、
そこへ $n+1$ 本目の直線が描かれると、すでにある n 本の直線と新たに交点が n 個生じるから、

$$a_{n+1}=a_n+n$$

これは階差型の漸化式である。

$$a_{n+1}-a_n=n$$

$$\begin{aligned}
\cancel{a_2}-a_1 &= 1\\
\cancel{a_3}-\cancel{a_2} &= 2\\
\cancel{a_4}-\cancel{a_3} &= 3\\
\vdots\quad &\quad \vdots\\
+)\ a_n-\cancel{a_{n-1}} &= n-1\\
\hline
a_n-a_1 &= 1+2+\cdots+(n-1)
\end{aligned}$$

$$a_n-0=\frac{n(n-1)}{2}$$

答　$a_n=\dfrac{n(n-1)}{2}$

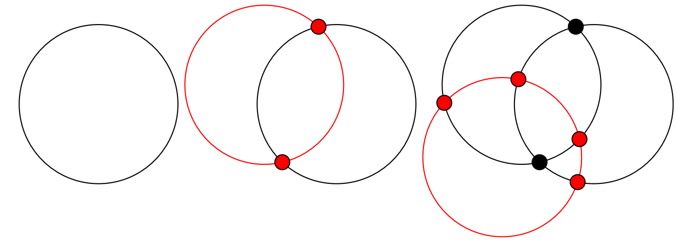
別解

n 本の直線の中から任意の 2 本を選ぶと交点が 1 つ対応する。n 本から 2 本を選ぶ方法は、

$${}_nC_2=\frac{n(n-1)}{2}$$

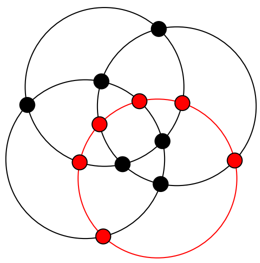
問 1　平面上に n 個の円があって，どの 2 つの円も異なる 2 点で交わり，また，どの 3 つの円も同一の点で交わっていない．このとき，これらの円の交点の総数 a_n を求めよ。

$n=1$　　$n=2$　　$n=3$



$a_n=0$　　$a_n=2$　　$a_n=6$

$n=4$



$a_n=12$

円が 1 個しかないとき、$a_1=0$ である。
円が n 個あるとき、交点の総数は a_n であり、そこへ $n+1$ 個目の円が描かれると、すでにある n 個の円と新たに交点が $2n$ 個生じるから、

$$a_{n+1}=a_n+2n$$

これは階差型の漸化式である。

$$a_{n+1}-a_n=2n$$

$$\begin{aligned}
\cancel{a_2}-a_1 &= 2\\
\cancel{a_3}-\cancel{a_2} &= 4\\
\cancel{a_4}-\cancel{a_3} &= 6\\
\vdots\quad &\quad \vdots\\
+)\ a_n-\cancel{a_{n-1}} &= 2(n-1)\\
\hline
a_n-a_1 &= 2\{1+2+\cdots+(n-1)\}
\end{aligned}$$

$$a_n-0=2\cdot\frac{n(n-1)}{2}$$

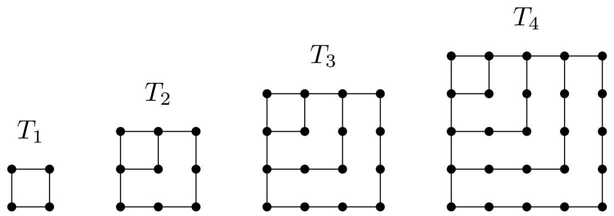
答　$a_n=n(n-1)$

別解

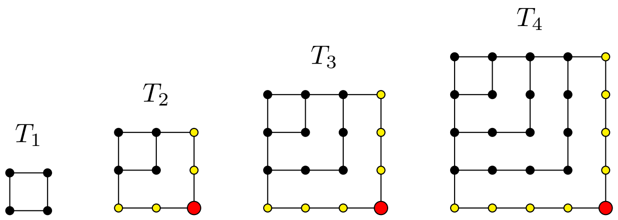
n 個の円の中から任意の 2 個を選ぶと 2 つの交点が対応する。n 個の円から 2 個を選ぶ方法は、

$$2\times{}_nC_2=2\times\frac{n(n-1)}{2}=n(n-1)$$

例 2　図のように正方形の辺に点が並んでおり、次々に辺の長さを大きくした図形を重ねる。一番外側の正方形の辺の長さが n の図形を T_n、そのときの点の数を a_n とする。a_n と a_{n-1} の関係を表す漸化式を求めよ。



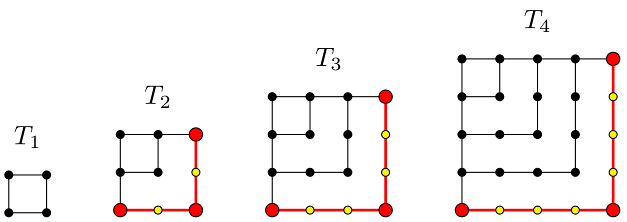
解 1



$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + 2 \times 2 + 1 \\
a_3 &= a_2 + 2 \times 3 + 1 \\
a_4 &= a_3 + 2 \times 4 + 1 \\
\vdots\ & \quad \vdots \\
a_n &= a_{n-1} + 2n + 1
\end{aligned}
$$

答　$a_n = a_{n-1} + 2n + 1$

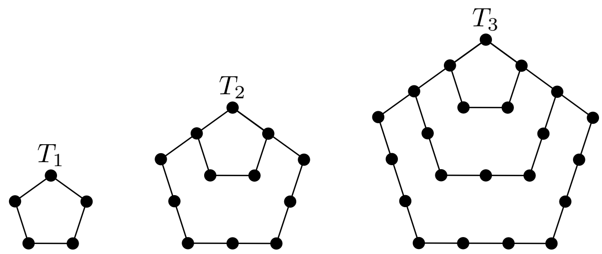
解 2



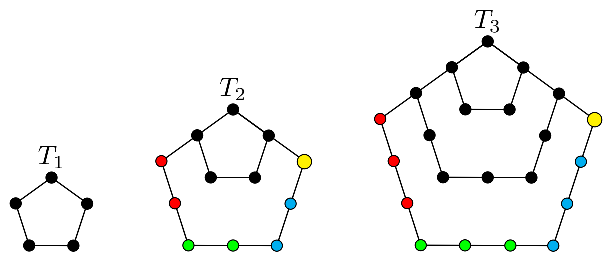
$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + 3 + 2 \times 1 \\
a_3 &= a_2 + 3 + 2 \times 2 \\
a_4 &= a_3 + 3 + 2 \times 3 \\
\vdots\ & \quad \vdots \\
a_n &= a_{n-1} + 3 + 2(n-1)
\end{aligned}
$$

答　$a_n = a_{n-1} + 2n + 1$

問 2　図のように，正五角形の辺に点が並んでおり，次々と辺の長さを大きくした図形を重ね，一番外側の正五角形の辺の長さが n の図形を T_n，そのときの点の数を a_n とする。a_n と a_{n-1} の関係を表す漸化式を求めよ。



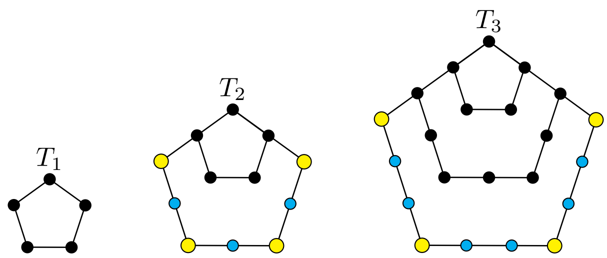
解 1



$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + 3 \times 2 + 1 \\
a_3 &= a_2 + 3 \times 3 + 1 \\
\vdots\ & \quad \vdots \\
a_n &= a_{n-1} + 3n + 1
\end{aligned}
$$

答　$a_n = a_{n-1} + 3n + 1$

解 2



$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + 4 + 3 \times 1 \\
a_3 &= a_2 + 4 + 3 \times 2 \\
\vdots\ & \quad \vdots \\
a_n &= a_{n-1} + 4 + 3 \times (n-1)
\end{aligned}
$$

答　$a_n = a_{n-1} + 3n + 1$