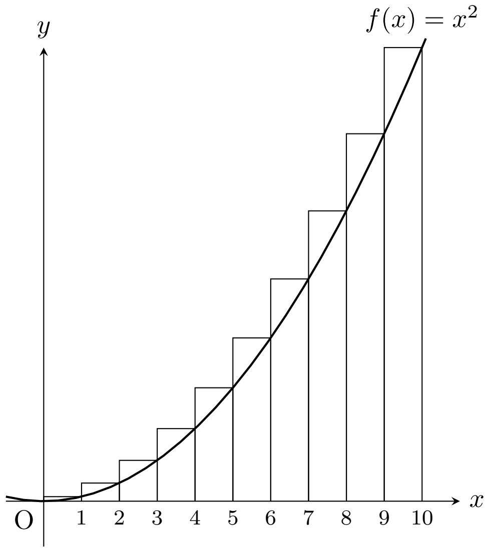
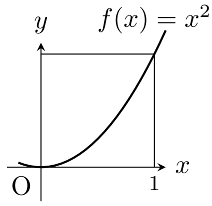
例 1　関数 $f(x) = x^2 \ (0 \leqq x \leqq 10)$ について、区間 $[0, 10]$ を 10 等分し、それぞれの分割点を x_n とする。図のように、分割点から左に幅 1 の長方形をつくり、その面積を a_n とし、a_1 から a_n までの和を S_n とする。

(1) S_1 を求めなさい。
(2) S_{n+1} を S_n の式で表しなさい
(3) 漸化式を用いて S_n の一般項を求めなさい
(4) S_{10} を求めなさい
(5) この値と定積分 $\int_0^{10} x^2 dx$ を比較し、その違いの理由を説明しなさい

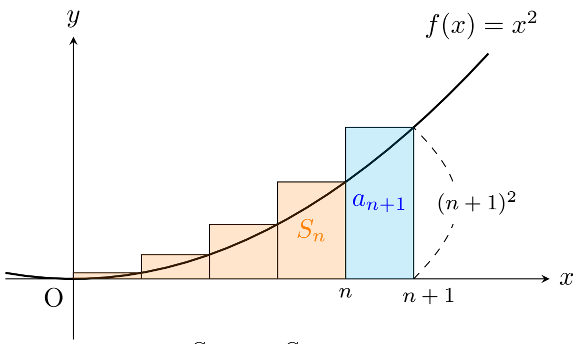


(1) S_1 を求めなさい。



答　$S_1 = 1$

(2) S_{n+1} を S_n の式で表しなさい



$$
\begin{aligned}
S_{n+1} &= S_n + a_{n+1} \\
&= S_n + (n+1)^2
\end{aligned}
$$

答　$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$

(3) 漸化式を用いて S_n の一般項を求めなさい

$$S_{n+1} - S_n = (n+1)^2$$

$$
\begin{array}{rrcl}
 & S_2 - S_1 & = & 2^2 \\
 & S_3 - S_2 & = & 3^2 \\
 & S_4 - S_3 & = & 4^2 \\
 & \vdots & & \vdots \\
+) & S_n - S_{n-1} & = & n^2 \\ \hline
 & S_n - S_1 & = & 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots n^2
\end{array}
$$

$$S_n = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

答　$S_n = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(4) S_{10} を求めなさい

$$S_{10} = \frac{1}{6}(10)(11)(21) = 385$$

答　$S_{10} = 385$

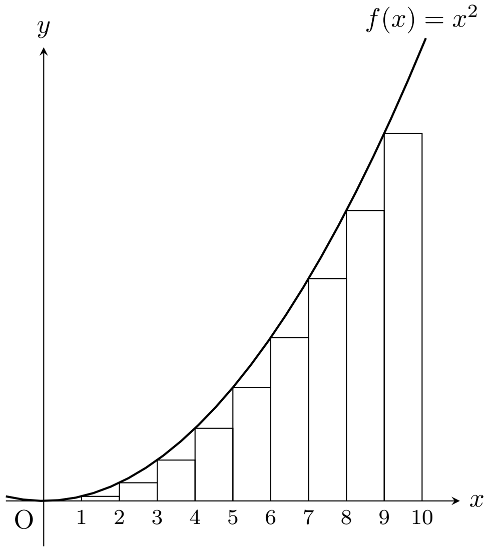
問 1 関数 $f(x) = x^2$ $(0 \leqq x \leqq 10)$ について、区間 $[0, 10]$ を 10 等分し、それぞれの分割点を x_n とする。図のように、分割点から右に幅 1 の長方形をつくり、その面積を b_n とし、b_1 から b_n までの和を T_n とする。

(1) T_1 を求めなさい。

(2) T_{n+1} を T_n の式で表しなさい

(3) 漸化式を用いて T_n の一般項を求めなさい

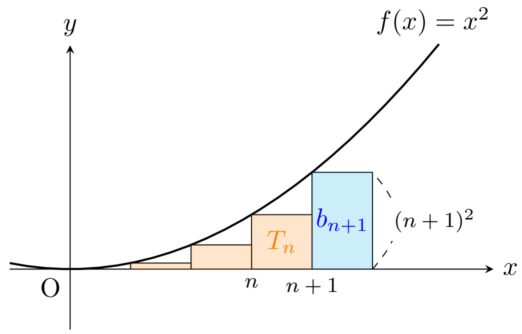
(4) T_9 を求めなさい



(1) T_1 を求めなさい。

$\boxed{答}$ $T_1 = 1$

(2) T_{n+1} を T_n の式で表しなさい



$$
\begin{aligned}
T_{n+1} &= T_n + b_{n+1} \\
&= T_n + (n+1)^2
\end{aligned}
$$

$\boxed{答}$ $T_{n+1} = T_n + (n+1)^2$

(3) 漸化式を用いて T_n の一般項を求めなさい

$$T_{n+1} - T_n = (n+1)^2$$

$$
\begin{array}{rcl}
T_2 - T_1 & = & 2^2 \\
T_3 - T_2 & = & 3^2 \\
T_4 - T_3 & = & 4^2 \\
\vdots & & \vdots \\
+)\ T_n - T_{n-1} & = & n^2 \\
\hline
T_n - T_1 & = & 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2
\end{array}
$$

$$T_n = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

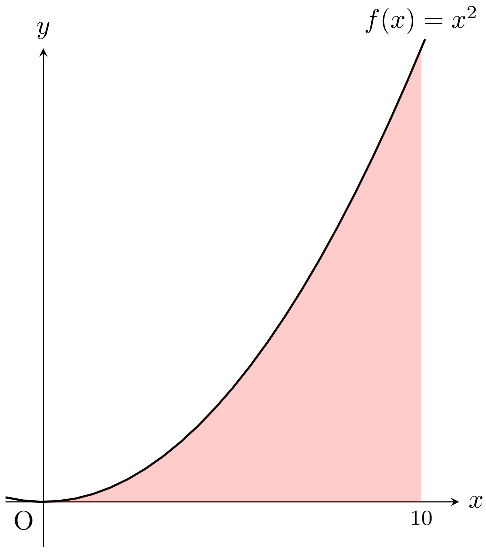
$\boxed{答}$ $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(4) T_9 を求めなさい

$$T_9 = \frac{1}{6}(9)(10)(19) = 285$$

$\boxed{備考}$

定積分 $\displaystyle\int_0^{10} x^2 dx$ は下図の色つきの範囲の面積を表す。これを計算すると、$\dfrac{1000}{3} = 333.3$ となる。一方、例題 1 と問 1 の答えの平均は $\dfrac{385 + 285}{2} = 335$ となり、その差は 1.66 と、良い近似ができていることが分かる。



++*+*+*+*+*+*+ **【解答】** *+*+*+*+*+*+*+*+

例 24

問 24

例 25

問 25

例 26

問 26