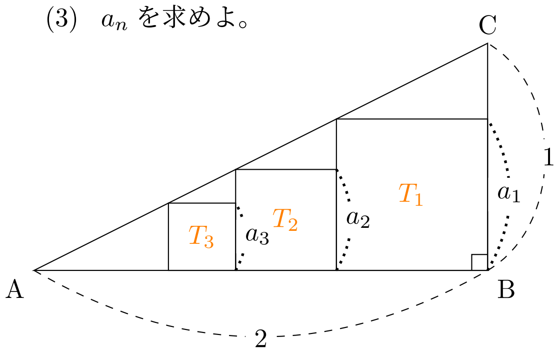
例 1　$AB=2,\ BC=1,\ \angle B=90^\circ$ の直角三角形 ABC に内接する正方形を図のように次々に頂点 A の方向に次々と作る。正方形を順に $T_1, T_2, T_3, \cdots$ とする。T_n の正方形の一辺の長さを a_n とするとき、次の問いに答えよ。

(1)　a_1 を求めよ。

(2)　a_{n+1} を a_n の式で表せ。

(3)　a_n を求めよ。

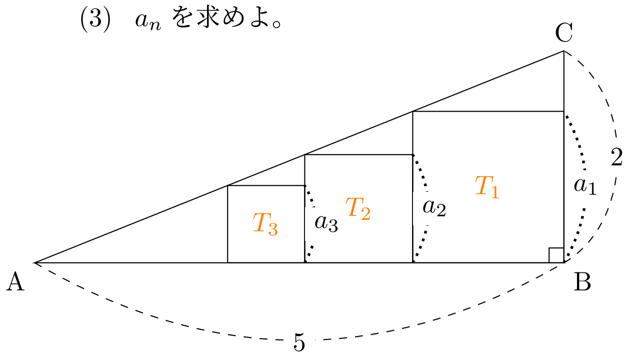


問 1　$AB=5,\ BC=2,\ \angle B=90^\circ$ の直角三角形 ABC に内接する正方形を図のように次々に頂点 A の方向に次々と作る。正方形を順に $T_1, T_2, T_3, \cdots$ とする。T_n の正方形の一辺の長さを a_n とするとき、次の問いに答えよ。

(1)　a_1 を求めよ。

(2)　a_{n+1} を a_n の式で表せ。

(3)　a_n を求めよ。



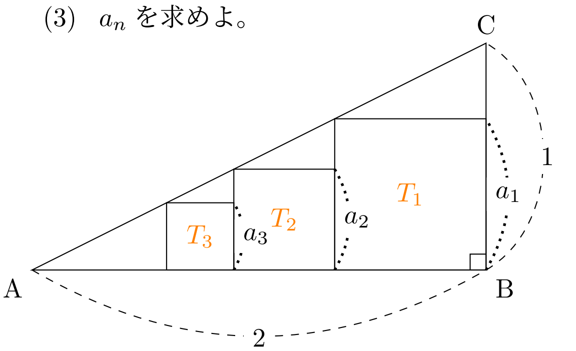
++*+*+*+*+*+*+ 【解答】*+*+*+*+*+*+*+*+

例 1 $AB=2,\ BC=1,\ \angle B=90^\circ$ の直角三角形 ABC に内接する正方形を図のように次々に頂点 A の方向に次々と作る。正方形を順に $T_1, T_2, T_3, \cdots$ とする。T_n の正方形の一辺の長さを a_n とするとき、次の問いに答えよ。

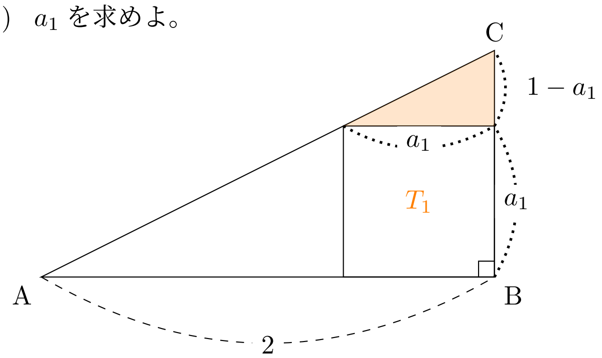
(1) a_1 を求めよ。

(2) a_{n+1} を a_n の式で表せ。

(3) a_n を求めよ。



(1) a_1 を求めよ。

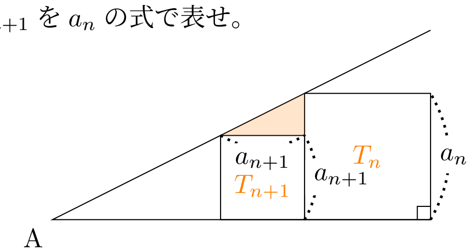


$\triangle ABC$ と T_1 の上部の三角形は相似であるから、

$$a_1 : (1-a_1) = 2 : 1$$
$$a_1 = 2 - 2a_1$$

答 $a_1 = \frac{2}{3}$

(2) a_{n+1} を a_n の式で表せ。



T_{n+1} の上部にできる直角三角形も全体の直角三角形と相似であるから、

$$a_{n+1} : (a_n - a_{n+1}) = 2 : 1$$
$$a_{n+1} = 2a_n - 2a_{n+1}$$

答 $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$

(3) a_n を求めよ。
初項 $\frac{2}{3}$、公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるので、

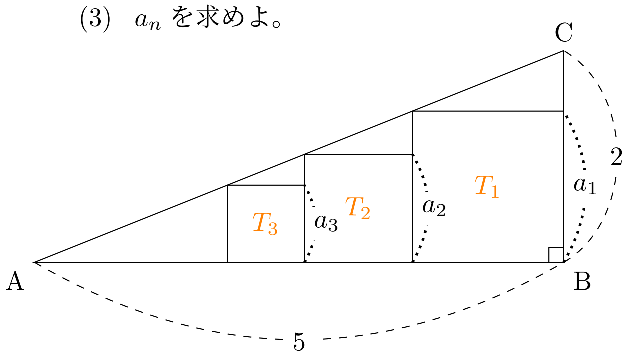
答 $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

問 1 $AB=5,\ BC=2,\ \angle B=90^\circ$ の直角三角形 ABC に内接する正方形を図のように次々に頂点 A の方向に次々と作る。正方形を順に $T_1, T_2, T_3, \cdots$ とする。T_n の正方形の一辺の長さを a_n とするとき、次の問いに答えよ。

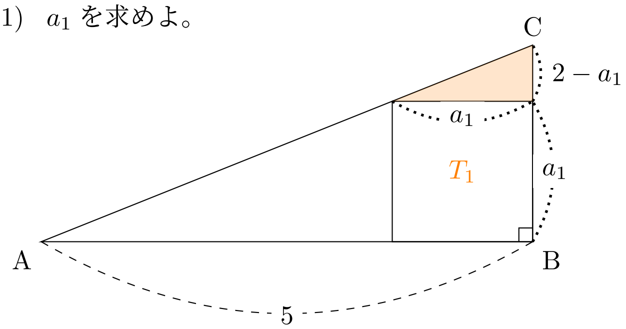
(1) a_1 を求めよ。

(2) a_{n+1} を a_n の式で表せ。

(3) a_n を求めよ。



(1) a_1 を求めよ。

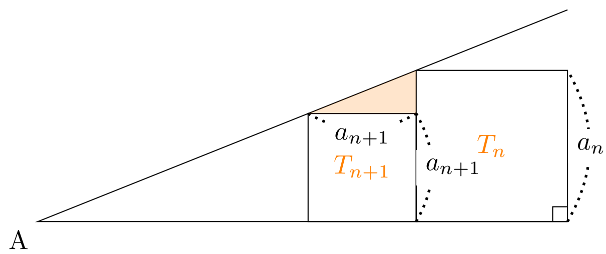


$\triangle ABC$ と T_1 の上の直角三角形は相似だから、

$$a_1 : (2-a_1) = 5 : 2$$
$$2a_1 = 10 - 5a_1$$

答 $a_1 = \frac{10}{7}$

(2) a_{n+1} を a_n の式で表せ。



$$a_{n+1} : (a_n - a_{n+1}) = 5 : 2$$
$$2a_{n+1} = 5a_n - 5a_{n+1}$$

答 $a_{n+1} = \frac{5}{7}a_n$

(3) a_n を求めよ。
初項 $\frac{10}{7}$、公比 $\frac{5}{7}$ の等比数列であるから、

$$a_n = \frac{10}{7}\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^{n-1}$$

答 $a_n = 2\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^n$