**漸化式の４つの型**

1 等差型： $a_{n+1} = a_n + d$

2 等比型： $a_{n+1} = r \cdot a_n$

3 階差型： $a_{n+1} = a_n + f(n)$

4 一般型： $a_{n+1} = p\,a_n + q$

**例 1** 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{3}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$$

どのような数列になるのか漸化式から求めてみよう。

$$a_2 = \frac{\frac{1}{3}}{2 \cdot \frac{1}{3} + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{5}$$

$$a_3 = \frac{\frac{1}{5}}{2 \cdot \frac{1}{5} + 1} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{1}{7}$$

$$a_4 = \frac{\frac{1}{7}}{2 \cdot \frac{1}{7} + 1} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{9}{7}} = \frac{1}{9}$$

与えられた漸化式の逆数をとると、

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n + 1}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 2 + \frac{1}{a_n}$$

ここで、$b_n = \frac{1}{a_n}$ とすると、

$$b_1 = 3, \qquad b_{n+1} = b_n + 2$$

$\{b_n\}$ は初項 3、公差 2 の等差数列だから、

$$b_n = 3 + 2(n-1) = 2n + 1$$

答 $a_n = \dfrac{1}{2n+1}$

**問 1** 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{5}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{3a_n + 1}$$

与えられた漸化式の逆数をとると、

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3a_n + 1}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 3 + \frac{1}{a_n}$$

ここで、$b_n = \frac{1}{a_n}$ とすると、

$$b_1 = 5, \qquad b_{n+1} = b_n + 3$$

$b_n$ は初項 5、 公差 3 の等差数列だから、

$$b_n = 5 + 3(n-1) = 3n + 2$$

答 $a_n = \dfrac{1}{3n+2}$

**例 2** 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 5}$$

与えられた漸化式の逆数をとると、

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n + 5}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 2 + \frac{5}{a_n}$$

ここで、$b_n = \frac{1}{a_n}$ と置き換える。

$$b_1 = \frac{1}{2}, \qquad b_{n+1} = 2 + 5b_n$$

特性方程式は $c = 2 + 5c$,　この解は $c = -\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{rrcl} & b_{n+1} & = & 2 + 5b_n \\ -) & c & = & 2 + 5c \\ \hline & b_{n+1} - c & = & 5(b_n - c) \end{array}$$

$d_n = b_n + \frac{1}{2}$ と置き換える。

$$d_1 = 1, \qquad d_{n+1} = 5d_n$$

$\{d_n\}$ は初項 1、公比 5 の等比数列だから、

$$d_n = 5^{n-1}$$

$$b_n = 5^{n-1} - \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 5^{n-1} - 1}{2}$$

答 $a_n = \dfrac{2}{2 \cdot 5^{n-1} - 1}$

**問 2** 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{8a_n - 3}$$

漸化式の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{8a_n - 3}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 8 - \frac{3}{a_n}$$

ここで、$b_n = \frac{1}{a_n}$ と置き換える。

$$b_1 = 1, \qquad b_{n+1} = 8 - 3b_n$$

特性方程式は $c = 8 - 3c$、この解は $c = 2$

$$\begin{array}{rrcl} & b_{n+1} & = & 8 - 3b_n \\ -) & c & = & 8 - 3c \\ \hline & b_{n+1} - c & = & -3(b_n - c) \end{array}$$

$d_n = b_n - 2$ と置き換える。

$$d_1 = -1, \qquad d_{n+1} = -3d_n$$

$\{d_n\}$ は初項 $-1$、公比 $-3$ の等比数列

$$d_n = -(-3)^{n-1}$$

$$b_n = -(-3)^{n-1} + 2$$

答 $a_n = -\dfrac{1}{(-3)^{n-1} - 2}$

*+*+*+*+*+*+*+*+ **【解答】** *+*+*+*+*+*+*+*+

例 24

問 24

例 25

問 25

例 26

問 26