漸化式の４つの型

1 等差型：　$a_{n+1}=a_n+d$
2 等比型：　$a_{n+1}=r\cdot a_n$
3 階差型：　$a_{n+1}=a_n+f(n)$
4 一般型：　$a_{n+1}=p\,a_n+q$

例 1　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=10,\quad a_{n+1}=2a_n+2^{n+1}$

答　$a_n=$

(2)　$a_1=3,\quad a_{n+1}=2a_n+\dfrac{6}{2^{n+1}}$

答　$a_n=$

問 1　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=10,\quad a_{n+1}=5a_n-5^{n+1}$

答　$a_n=$

(2)　$a_1=1$、　$a_{n+1}=2a_n+\dfrac{3}{2^n}$

答　$a_n=$

++*+*+*+*+*+*+ 【解答】*+*+*+*+*+*+*+*+

例 1　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1 = 10, \quad a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+1}$

漸化式の両辺を 2^{n+1} で割ると、

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{2a_n}{2^{n+1}} + \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + 1$$

ここで、$b_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ と置き換えると、

$b_1 = \dfrac{a_1}{2^1} = 5, \quad b_{n+1} = b_n + 1$

$\{b_n\}$ は初項 5, 公差 1 の等差数列だから、

$b_n = 5 + (n-1) = n + 4$

答　$a_n = (n+4)2^n$

(2)　$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 2a_n + \dfrac{6}{2^{n+1}}$

漸化式の両辺に 2^{n+1} をかけると、

$$2^{n+1}a_{n+1} = 2^{n+1} \cdot 2a_n + 6$$

$$2^{n+1}a_{n+1} = 4 \cdot 2^n a_n + 6$$

ここで、$b_n = 2^n a_n$ と置き換えると、

$b_1 = 6, \quad b_{n+1} = 4b_n + 6$

特性方程式 $c = 4c + 6$ を解くと、$c = -2$

$$\begin{array}{rrcl} & b_{n+1} & = & 4b_n + 6 \\ -) & c & = & 4c + 6 \\ \hline & b_{n+1} - c & = & 4(b_n - c) \end{array}$$

ここで、$d_n = b_n + 2$ と置き換えると、

$d_1 = 8, \quad d_{n+1} = 4d_n$

$\{d_n\}$ は等比数列だから、$d_n = 8 \cdot 4^{n-1} = 2 \cdot 4^n$

$$b_n = 2 \cdot 4^n - 2 = 2(4^n - 1)$$

$$a_n = \frac{2(4^n - 1)}{2^n} = 2\left(2^n - \frac{1}{2^n}\right)$$

答　$a_n = 2\left(2^n - \frac{1}{2^n}\right)$

問 1　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1 = 10, \quad a_{n+1} = 5a_n - 5^{n+1}$

漸化式の両辺を 5^{n+1} で割ると、

$$\frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{5a_n}{5^{n+1}} - \frac{5^{n+1}}{5^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{a_n}{5^n} - 1$$

ここで、$b_n = \dfrac{a_n}{5^n}$ と置き換える。

$b_1 = 2, \quad b_{n+1} = b_n - 1$

$\{b_n\}$ は初項 2、公差 -1 の等差数列

$b_n = 2 - 1 \cdot (n-1) = -n + 3$

答　$a_n = (-n+3) \cdot 5^n$

(2)　$a_1 = 1、\quad a_{n+1} = 2a_n + \dfrac{3}{2^n}$

漸化式の両辺に 2^{n+1} をかける。

$$2^{n+1} \cdot a_{n+1} = 2^{n+1} \cdot 2a_n + 2^{n+1} \cdot \frac{3}{2^n}$$

$$2^{n+1} \cdot a_{n+1} = 4 \cdot 2^n \cdot a_n + 6$$

ここで $b_n = 2^n a_n$ と置き換えると、

$b_1 = 2, \quad b_{n+1} = 4b_n + 6$

特性方程式 $c = 4c + 6$ を解くと、$c = -2$

$$\begin{array}{rrcl} & b_{n+1} & = & 4b_n + 6 \\ -) & c & = & 4c + 6 \\ \hline & b_{n+1} - c & = & 4(b_n - c) \end{array}$$

ここで、$d_n = b_n + 2$ と置き換えると、

$d_1 = 4, \quad d_{n+1} = 4d_n$

$d_n = 4 \cdot 4^{n-1} = 4^n$

$b_n = 4^n - 2$

$a_n = \dfrac{4^n - 2}{2^n} = 2^n - \dfrac{1}{2^{n-1}}$

答　$a_n = 2^n - \dfrac{1}{2^{n-1}}$