漸化式の４つの型

$\boxed{1}$ 等差型： $a_{n+1} = a_n + d$

$\boxed{2}$ 等比型： $a_{n+1} = r \cdot a_n$

3 階差型： $a_{n+1} = a_n + f(n)$

4 一般型： $a_{n+1} = p\,a_n + q$

例 1　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を，[ ] 内のように置き換えることによって求めよ。

(1) $a_1 = 9,\quad \dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \dfrac{a_n}{3^n} - 2 \quad \left[\dfrac{a_n}{3^n} = b_n\right]$

答　$a_n =$

(2) $a_1 = 5,\quad n a_{n+1} = 2(n+1)a_n \quad \left[\dfrac{a_n}{n} = b_n\right]$

答　$a_n =$

問 1　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を，[ ] 内のように置き換えることによって求めよ。

(1) $a_1 = 12,\quad \dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \dfrac{a_n}{2^n} - 3 \quad \left[\dfrac{a_n}{2^n} = b_n\right]$

答　$a_n =$

(2) $a_1 = 4,\quad 2n a_{n+1} = 5(n+1)a_n \quad \left[\dfrac{a_n}{n} = b_n\right]$

答　$a_n =$

++*+*+*+*+*+*+ **【解答】** *+*+*+*+*+*+*+*+

例 1 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を，[ ] 内のように置き換えることによって求めよ。

(1) $a_1 = 9,\quad \dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \dfrac{a_n}{3^n} - 2 \quad \left[\dfrac{a_n}{3^n} = b_n\right]$

$b_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ と置き換える。

$$b_1 = \frac{a_1}{3^1} = 3 \qquad b_{n+1} = b_n - 2$$

$\{b_n\}$ は初項 3、公差 -2 の等差数列であるから、

$$\begin{aligned} b_n &= 3 - 2(n-1) \\ &= -2n + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= b_n \cdot 3^n \\ &= (-2n+5) \cdot 3^n \end{aligned}$$

答 $a_n = (-2n+5) \cdot 3^n$

(2) $a_1 = 5,\quad na_{n+1} = 2(n+1)a_n \quad \left[\dfrac{a_n}{n} = b_n\right]$

漸化式の両辺を $n(n+1)$ で割ると、

$$\frac{na_{n+1}}{n(n+1)} = \frac{2(n+1)a_n}{n(n+1)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{2a_n}{n}$$

ここで、$b_n = \dfrac{a_n}{n}$ と置き換えると、

$$b_1 = \frac{a_1}{1} = 5、\quad b_{n+1} = 2b_n$$

$\{b_n\}$ は初項 5 , 公比 2 の等比数列だから、

$b_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

答 $a_n = 5n \cdot 2^{n-1}$

問 1 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を，

内のように置き換えることによって求めよ。

(1) $a_1 = 12,\quad \dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \dfrac{a_n}{2^n} - 3 \quad \left[\dfrac{a_n}{2^n} = b_n\right]$

$b_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ と置き換える

$$b_1 = \frac{a_1}{2^1} = 6, \qquad b_{n+1} = b_n - 3$$

$\{b_n\}$ は初項 6, 公差 -3 の等差数列であるから

$$b_n = 6 - 3(n-1) = -3n + 9$$

答 $a_n = (-3n+9) \cdot 2^n$

(2) $a_1 = 4,\quad 2na_{n+1} = 5(n+1)a_n \quad \left[\dfrac{a_n}{n} = b_n\right]$

漸化式の両辺を $2n(n+1)$ で割ると、

$$\frac{2n\,a_{n+1}}{2n(n+1)} = \frac{5(n+1)\,a_n}{2n(n+1)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{5a_n}{2n}$$

$b_n = \dfrac{a_n}{n}$ と置き換える。

$$b_1 = \frac{a_1}{1} = 4 \quad b_{n+1} = \frac{5}{2}b_n$$

$\{b_n\}$ は初項 4、公比 $\dfrac{5}{2}$ の等比数列だから

$$b_n = 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}$$

答 $a_n = 4n \cdot \left(\dfrac{5}{2}\right)^{n-1}$