一般型 $a_{n+1} = p\,a_n + q$ の形の漸化式

$a_1 = 2,\ a_{n+1} = 3a_n - 2$ の漸化式で与えられる数列の一般項はどのようなものだろうか？

$$a_1 = 2,\quad a_2 = 4,\quad a_3 = 10,\quad a_4 = 28,\quad a_5 = 82,\ \cdots$$

この数列には、どのような規則があるだろうか？
各項をマイナス 1 した数列は、等比数列になっている。

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 4 & 10 & 28 & 82 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \end{array}$$

だから、$b_n = a_n - 1$ という数列を考えれば、この $\{b_n\}$ は初項 1、公比 3 の等比数列であるから、

$$b_n = 3^{n-1}$$

この $\{b_n\}$ から、$\{a_n\}$ を決定することができる。

$$\begin{aligned} a_n &= b_n + 1 \\ &= 3^{n-1} + 1 \end{aligned}$$

ならば、**各項をマイナス 1** すればよいということをどのように見つければ良いのだろうか？

例 1　$a_1 = 2,\ a_{n+1} = 3a_n - 2$ の数列の一般項を求めよ。

答　$a_n =$

問 1　次の漸化式で与えられた数列の一般項を求めよ。

(1)　$a_1 = 6,\ a_{n+1} = 2a_n - 3$

答　$a_n =$

(2)　$a_1 = 7,\quad 2a_{n+1} = a_n + 4$

答　$a_n =$

++*+*+*+*+*+*+ **【解答】** *+*+*+*+*+*+*+*+

例 1 $a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n-2$ の数列の一般項を求めよ。

特性方程式 $c=3c-2$ を作る。

$$\begin{array}{rrcll} & a_{n+1} & = & 3a_n-2 & \\ -) & c & = & 3c\ -2 & \cdots(A) \\ \hline & a_{n+1}-c & = & 3(a_n-c) & \cdots(B) \end{array}$$

まず、$c=3c-2$ を解くと、$c=1$。これを (B) へ

$$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$$

ここで $b_n=a_n-1$ と置き換えると

$$b_1=1,\quad b_{n+1}=3b_n$$

$\{b_n\}$ は初項１、公比３の等比数列であるから、

$$b_n=3^{n-1}$$

答 $a_n=3^{n-1}+1$

問 1 次の漸化式で与えられた数列の一般項を求めよ。

(1) $a_1=6,\ a_{n+1}=2a_n-3$

この数列は、$6, 9, 15, 27, 51, \cdots$

特性方程式 $c=2c-3$ を作る。$c=3$

$$\begin{array}{rrcl} & a_{n+1} & = & 2a_n-3 \\ -) & c & = & 2c\ -3 \\ \hline & a_{n+1}-c & = & 2(a_n-c) \end{array}$$

$$a_{n+1}-3=2(a_n-3)$$

ここで $b_n=a_n-3$ と置き換えると、

$$b_1=3,\quad b_{n+1}=2b_n$$

初項 3, 公比 2 の等比数列であるから、

$$b_n=3\cdot 2^{n-1}$$

答 $a_n=3\cdot 2^{n-1}+3$

(2) $a_1=7,\quad 2a_{n+1}=a_n+4$

特性方程式 $2c=c+4$ を作る。 $c=4$

$$\begin{array}{rrcl} & 2a_{n+1} & = & a_n+4 \\ -) & 2c & = & c\ +4 \\ \hline & 2(a_{n+1}-c) & = & a_n-c \end{array}$$

$$2(a_{n+1}-4)=a_n-4$$

ここで、$b_n=a_n-4$ と置き換えると、

$$b_1=3,\quad 2b_{n+1}=b_n$$

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$$

b_n は初項 3、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。

$$b_n=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

答 $a_n=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+4$