例 51　1 から順に自然数を並べ、下のように 1 個、2 個、4 個、$\cdots$ となるように群に分ける。

$$1 \,|\, 2,\ 3 \,|\, 4,\ 5,\ 6,\ 7 \,|\, 8,\ 9, \cdots$$

第 n 群が含む項数は 2^{n-1} 個であるとき、次の問いに答えよ。

(1) 第 5 群の最初の数と最後の数を求めよ。

答　最初の数：　　　　, 最後の数：

(2) 第 5 群に含まれる数の総和を求めよ。

答

(3) 第 n 群に含まれる数の総和を求めよ。

答

問 51　1 から順に自然数を並べ、下のように 1 個、3 個、5 個、$\cdots$ となるように群に分ける。

$$1 \,|\, 2,\ 3,\ 4 \,|\, 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9 \,|\, 10, \cdots$$

第 n 群が含む項数は $(2n-1)$ 個であるとき、次の問いに答えよ。

(1) 第 6 群の最初の数と最後の数を求めよ。

答　最初の数：　　　　, 最後の数：

(2) 第 6 群に含まれる数の総和を求めよ。

答

(3) 第 n 群に含まれる数の総和を求めよ。

答

例 52 正の奇数を小さい方から順に並べ、下のように 1 個、2 個、3 個、$\cdots$ となるように群に分ける。

$$1 \,|\, 3, 5 \,|\, 7, 9, 11 \,|\, 13, 15, 17, 19 \,|\, \cdots$$

第 n 群が含む項数が n のとき、次の問いに答えよ。

(1) 第 20 群の最初の数を求めよ。

$\{a_n\} = 1, 3, 5, \cdots$ の一般項は、$a_n = 2n - 1$

答 ________

(2) 第 20 群の最後の数を求めよ。

答 ________

(3) 第 20 群の総和を求めよ。

答 ________

問 52 正の奇数を小さい方から順に並べ、下のように 1 個、2 個、4 個、$\cdots$ となるように群に分ける。

$$1 \,|\, 3, 5 \,|\, 7, 9, 11, 13 \,|\, 15, \cdots$$

第 n 群が含む項数が 2^{n-1} のとき、次の問いに答えよ。

(1) 第 7 群の最初の数を求めよ。

答 ________

(2) 第 7 群の最後の数を求めよ。

答 ________

(3) 第 7 群の総和を求めよ。

答 ________

++*+*+*+*+*+*+*+ 【解答】*+*+*+*+*+*+*+*+*+

例 51 1 から順に自然数を並べ、下のように 1 個、2 個、4 個、$\cdots$ となるように群に分ける。

$$1 \,|\, 2,\ 3 \,|\, 4,\ 5,\ 6,\ 7 \,|\, 8,\ 9, \cdots$$

第 n 群が含む項数は 2^{n-1} 個であるとき、次の問いに答えよ。

(1) 第 5 群の最初の数と最後の数を求めよ。

第 4 群までの項数の総和は、

$1 + 2 + 2^2 + 2^3 = 15$

したがって、第 5 群の初めの数は 16

第 5 群までの項数の総和は、

$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31$

したがって、第 5 群の終わりの数は 31

答 最初の数：16 ，最後の数：31

(2) 第 5 群に含まれる数の総和を求めよ。

第 5 群は、初項 16、末項 31、項数 $2^4 = 16$ の等差数列であるので、

$$S = \frac{(16+31) \times 16}{2} = 376$$

答 376

(3) 第 n 群に含まれる数の総和を求めよ。

第 $n-1$ 群までの項数の総和は、

$$\begin{aligned} &1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2} \\ &= \frac{1-2^{n-1}}{1-2} \\ &= 2^{n-1} - 1 \end{aligned}$$

だから、第 n 群の最初の数は 2^{n-1}

第 n 群までの項数の総和は、

$$\begin{aligned} &1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1} \\ &= \frac{1-2^n}{1-2} \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

だから、第 n 群の最後の数は $2^n - 1$

第 n 群は、初項 2^{n-1}、末項 $2^n - 1$、項数 2^{n-1} の等差数列であるから、

$$\begin{aligned} S &= \frac{(2^{n-1} + 2^n - 1) \cdot 2^{n-1}}{2} \\ &= (2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-1} - 1) \cdot 2^{n-2} \\ &= (3 \cdot 2^{n-1} - 1) \cdot 2^{n-2} \end{aligned}$$

答 $(3 \cdot 2^{n-1} - 1) \cdot 2^{n-2}$

問 51 1 から順に自然数を並べ、下のように 1 個、3 個、5 個、$\cdots$ となるように群に分ける。

$$1 \,|\, 2,\ 3,\ 4 \,|\, 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9 \,|\, 10, \cdots$$

第 n 群が含む項数は $(2n-1)$ 個であるとき、次の問いに答えよ。

(1) 第 6 群の最初の数と最後の数を求めよ。

第 5 群までの項数の総和は、

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$

ゆえに、第 6 群の初めの数は 26

第 6 群までの項数の総和は、

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$

よって、第 6 群の最後の数は 36

答 最初の数：26 ，最後の数：36

(2) 第 6 群に含まれる数の総和を求めよ。

第 6 群は、初項 26、末項 36、項数 11 の等差数列であるから、

$$S = \frac{(26+36) \times 11}{2} = 341$$

答 341

(3) 第 n 群に含まれる数の総和を求めよ。

第 $n-1$ 群までの項数の総和は、

$$\begin{aligned} &1 + 3 + 5 + \cdots + \{2(n-1) - 1\} \\ &= \frac{(1 + 2n - 3)(n-1)}{2} \\ &= n^2 - 2n + 1 \end{aligned}$$

したがって、第 n 群の最初の数は $n^2 - 2n + 2$

第 n 群までの項数の総和は、

$$\begin{aligned} &1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) \\ &= \frac{(1 + 2n - 1)n}{2} \\ &= n^2 \end{aligned}$$

したがって、第 n 群の最初の数は n^2

第 n 群は初項 $n^2 - 2n + 2$、末項 n^2、項数 $2n-1$ の等差数列であるから、

$$\begin{aligned} S &= \frac{(n^2 - 2n + 2 + n^2)(2n-1)}{2} \\ &= \frac{(2n^2 - 2n + 2)(2n-1)}{2} \\ &= (n^2 - n + 1)(2n-1) \end{aligned}$$

答 $(n^2 - n + 1)(2n - 1)$

例 52 正の奇数を小さい方から順に並べ、下のように 1 個、2 個、3 個、$\cdots$ となるように群に分ける。

$$1\,|\,3,5\,|\,7,9,11\,|\,13,15,17,19\,|\,\cdots$$

第 n 群が含む項数が n のとき、次の問いに答えよ。

(1) 第 20 群の最初の数を求めよ。

$\{a_n\} = 1,3,5,\cdots$ の一般項は、$a_n = 2n-1$

第 19 群までの項数の総和は、

$$1+2+3+\cdots+19 = \frac{(1+19)\times 19}{2} = 190$$

よって、第 20 群の最初の数は 191 番目の数である。

$$a_{191} = 2\times 191 - 1 = 381$$

答 381

(2) 第 20 群の最後の数を求めよ。

第 20 群までの項数の総和は、

$$1+2+3+\cdots+19+20 = 190+20 = 210$$

よって、第 20 群の最後の数は 210 番目の数である。

$$a_{210} = 2\times 210 - 1 = 419$$

答 419

(3) 第 20 群の総和を求めよ。

第 20 群は、初項 381、末項 419、項数 20 の等差数列だから、

$$S = \frac{(381+419)\times 20}{2} = \frac{800\times 20}{2} = 8000$$

答 8000

問 52 正の奇数を小さい方から順に並べ、下のように 1 個、2 個、4 個、$\cdots$ となるように群に分ける。

$$1\,|\,3,5\,|\,7,9,11,13\,|\,15,\cdots$$

第 n 群が含む項数が 2^{n-1} のとき、次の問いに答えよ。

(1) 第 7 群の最初の数を求めよ。

$\{a_n\} = 1,3,5,\cdots$ の一般項は、$a_n = 2n-1$

第 6 群までの項数の総和は、

$$1+2+2^2+\cdots+2^5 = \frac{1-2^6}{1-2} = 63$$

よって、第 7 群の最初の数は 64 番目である。

$$a_{64} = 2\times 64 - 1 = 127$$

答 127

(2) 第 7 群の最後の数を求めよ。

第 7 群までの項数の総和は、

$$1+2+2^2+\cdots+2^6 = 63+64 = 127$$

だから、第 7 群の最初の数は 127 番目である。

$$a_{127} = 2\times 127 - 1 = 253$$

答 253

(3) 第 7 群の総和を求めよ。

第 7 群は初項 127、末項 253、項数 $2^6 = 64$ の等差数列

$$S = \frac{(127+253)\times 64}{2} = \frac{380\times 64}{2} = 12160$$

答 12160