

例 1 n を自然数の定数とするとき、次の和を求めよ。

$$S_n = 1 \cdot (n+2) + 2 \cdot (n+4) + 3 \cdot (n+6) + \cdots + (n-1) \cdot (3n-2) + n \cdot 3n$$

問 1 n を自然数の定数とするとき、次の和を求めよ。

$$S_n = 1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \cdots + (n-1) \cdot 2 + n \cdot 1$$

例 1 n を自然数の定数とするとき、次の和を求めよ。

$$S_1 = 1 \cdot 3$$

$$S_3 = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 9$$

k	(1)	(2)	(3)	$\dots$	$(n-1)$	(n)
a_k	$1 \cdot (n+2)$	$2 \cdot (n+4)$	$3 \cdot (n+6)$	$\dots$	$(n-1) \cdot (3n-2)$	$n \cdot 3n$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (2k^2 + nk) \\ &= 2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n^2(n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)}{6} \{ (4n+2) + 3n \} \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(7n+2) \end{aligned}$$
$$S_n = 1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \cdots + (n-1) \cdot 2 + n \cdot 1$$
$$S_1 = 1 \cdot 1$$

$$S_3 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1$$

k	(1)	(2)	(3)		$(n-1)$	(n)
a_k	$1 \cdot n$	$2 \cdot (n-1)$	$3 \cdot (n-2)$	$\dots$	$(n-1) \cdot 2$	$n \cdot 1$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{-k^2 + (n+1)k\} \\ &= -\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)\frac{n(n+1)}{2} \\ &= -\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{n(n+1)}{6} \{- (2n+1) + 3(n+1)\} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

※ この S_n で生み出される数を四面体数 (Tetrahedral number) という。1, 4, 10, 20, 35, $\dots$