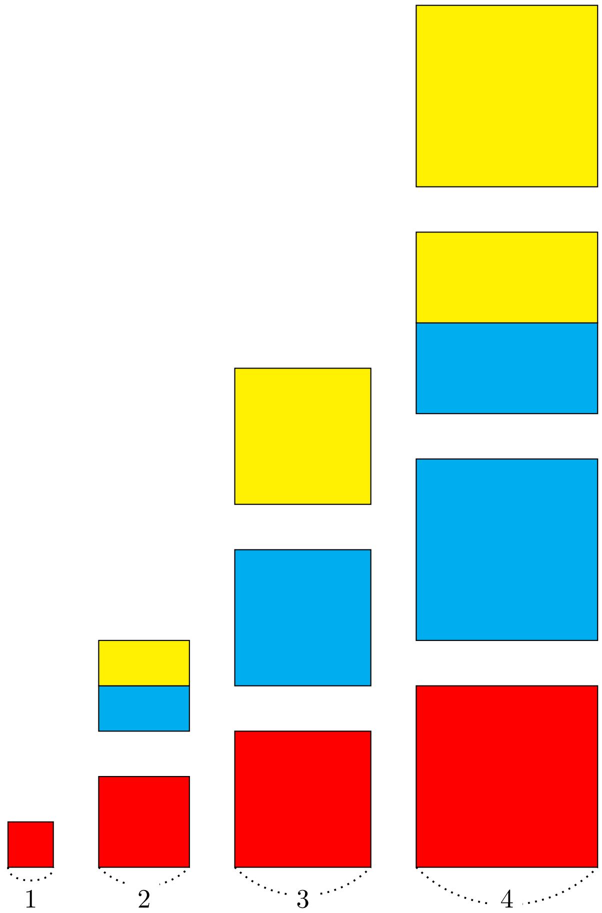
数列　P1403 自然数３乗の和

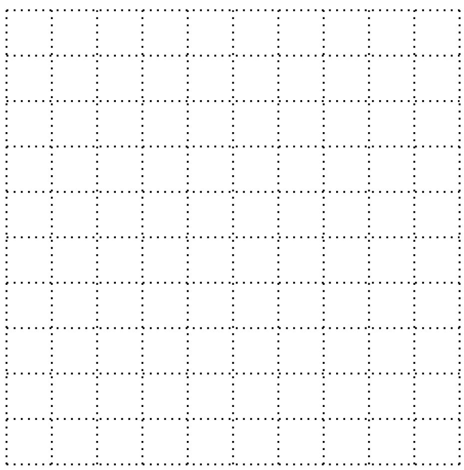
組　　番　名前

Σの公式 (3)

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

$$\sum_{k=1}^{4} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$$





例 1　次の値を求めよ。

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 19^3$$

問 1　次の値を求めよ。

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 11^3$$

例 2　次の値を求めよ。

$$10^3 + 11^3 + 12^3 + \cdots + 19^3$$

問 2　次の値を求めよ。

$$10^3 + 11^3 + 12^3 + \cdots + 100^3$$

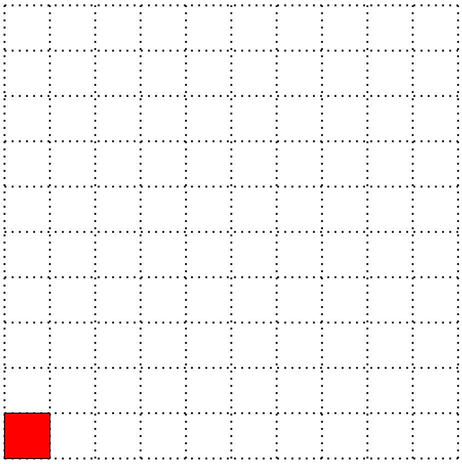
例 3　次の値を求めよ。

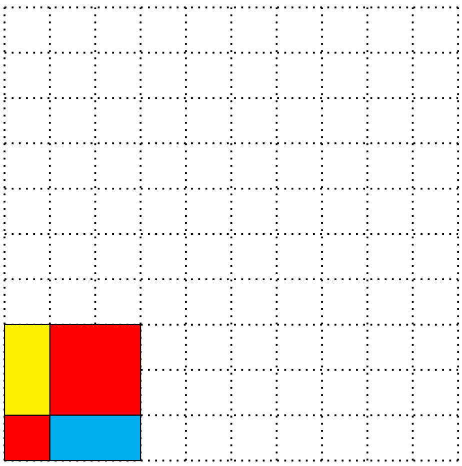
$$\sum_{k=5}^{10}(k-1)^3$$

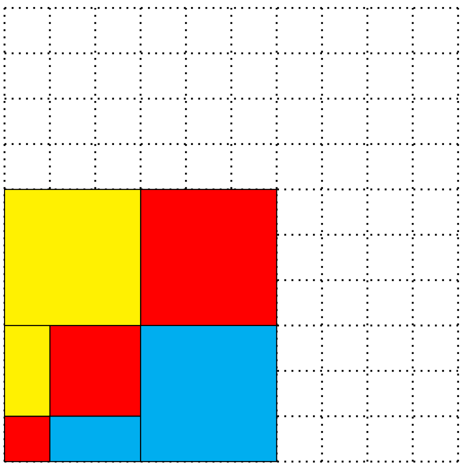
問 3　次の値を求めよ。

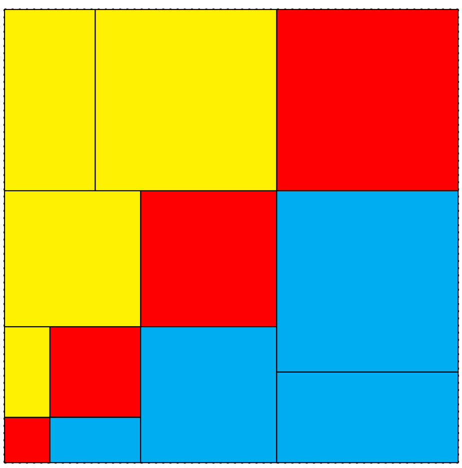
$$\sum_{k=-1}^{7}(k+2)^3$$

++*+*+*+*+*+*+ 【解答】 *+*+*+*+*+*+*+*+









例 1　次の値を求めよ。

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+19^3$$

答　$\displaystyle\sum_{k=1}^{19}k^3=\left\{\frac{19(19+1)}{2}\right\}^2=36100$

問 1　次の値を求めよ。

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+11^3$$

答　$\displaystyle\sum_{k=1}^{11}k^3=\left\{\frac{11(11+1)}{2}\right\}^2=66^2=4356$

例 2　次の値を求めよ。

$$10^3+11^3+12^3+\cdots+19^3$$

答　$\displaystyle\sum_{k=1}^{19}k^3-\sum_{k=1}^{9}k^3$

$$=\left\{\frac{19\times 20}{2}\right\}^2-\left\{\frac{9\times 10}{2}\right\}^2$$

$$=\left(\frac{19\times 20}{2}-\frac{9\times 10}{2}\right)\left(\frac{19\times 20}{2}+\frac{9\times 10}{2}\right)$$

$$=(190-45)(190+45)$$

$$=145\times 235=34075$$

問 2　次の値を求めよ。

$$10^3+11^3+12^3+\cdots+100^3$$

答　$\displaystyle\sum_{k=1}^{100}k^3-\sum_{k=1}^{9}k^3$

$$=\left\{\frac{100\times 101}{2}\right\}^2-\left\{\frac{9\times 10}{2}\right\}^2$$

$$=\left(\frac{100\times 101}{2}-\frac{9\times 10}{2}\right)\left(\frac{100\times 101}{2}+\frac{9\times 10}{2}\right)$$

$$=(5050-45)(5050+45)=5005\times 5095=25500475$$

例 3　次の値を求めよ。

$$\sum_{k=5}^{10}(k-1)^3$$

この式は、$k=5,6,7\cdots,10$ と代入していくと、

$$4^3+5^3+\cdots+9^3=\sum_{t=4}^{9}t^3$$

とすることができる。このように、インデックスの文字を置き換えると簡単に計算ができる場合がある。
問題の式の $k-1=t$ と置き換えると、

$$k=5\Longrightarrow t=4$$

$$k=10\Longrightarrow t=9$$

$$\sum_{t=4}^{9}t^3=\sum_{t=1}^{9}t^3-\sum_{t=1}^{3}t^3$$

$$=\left\{\frac{9\times 10}{2}\right\}^2-\left\{\frac{3\times 4}{2}\right\}^2$$

$$=\left(\frac{9\times 10}{2}-\frac{3\times 4}{2}\right)\left(\frac{9\times 10}{2}+\frac{3\times 4}{2}\right)$$

$$=(45-6)(45+6)=1989$$

問 3　次の値を求めよ。

$$\sum_{k=-1}^{7}(k+2)^3$$

$k+2=t$ とすると、

$$k=-1 \Longrightarrow t=1$$

$$k=7 \Longrightarrow t=9$$

$$\sum_{k=-1}^{7}(k+2)^3=\sum_{t=1}^{9}t^3$$

$$=\left\{\frac{9\times 10}{2}\right\}^2$$

$$=45^2=2025$$

$$\sum_{k=1}^{4}k^3=(1+2+3+4)^2=\left\{\frac{4(4+1)}{2}\right\}^2$$

$$1^3+2^3+\cdots+9^3+$$

$$\sum_{k=5}^{10}(k-1)^3=\sum_{k=5}^{10}(k^3-3k^2+3k-1)$$