**Σの公式 (2) 自然数の２乗和**

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

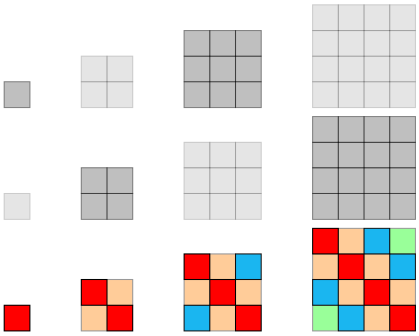
**例 24**　$3\sum_{k=1}^{4} k^2 = (2\times 4+1)\dfrac{4(4+1)}{2}$

を面積図を用いて導け。

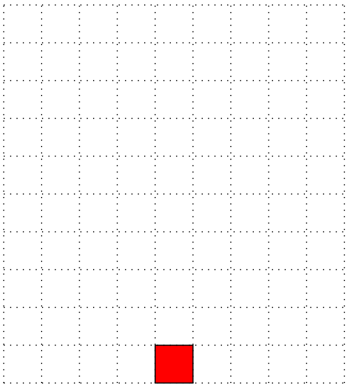
ここで

$$\sum_{k=1}^{4} k^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2$$

一辺の長さが $1,2,3,4,\cdots$ のタイルを 3 枚ずつ用意する。



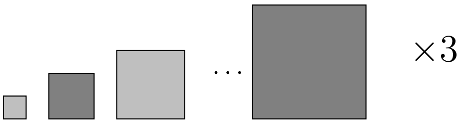
この 3 枚ずつのタイルは、1 から 2、1 から 3、1 から 4、$\cdots$ を上手に並べるといずれも長方形の形にできる。



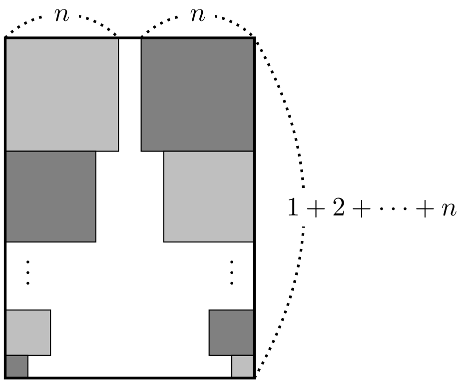
**問**　$\sum_{k=1}^{n} k^2$ の公式を面積図を使って導け。

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$$

タイルを $1\times 1$、$2\times 2$、$\cdots$、$n\times n$ を 3 セット用意する。




これを全体が長方形になるように並べていく。



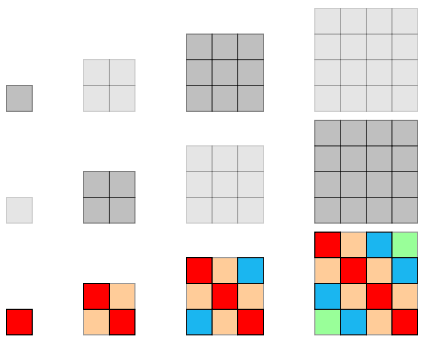
+*+*+*+*+*+*+*+*+*+* 解答+*+*+*+*+*+*+*+*+*+*

**例 24** $3\sum_{k=1}^{4} k^2 = (2 \times 4 + 1)\dfrac{4(4+1)}{2}$
を面積図を用いて導け。

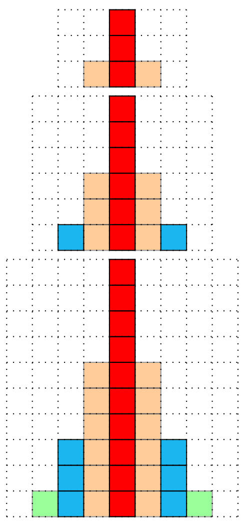
ここで

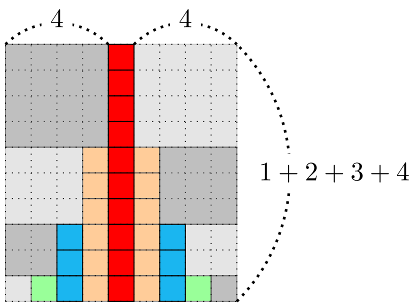
$$\sum_{k=1}^{4} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$$

一辺の長さが $1, 2, 3, 4, \cdots$ のタイルを 3 枚ずつ用意する。



この 3 枚ずつのタイルは、1 から 2、1 から 3、1 から 4、$\cdots$ を上手に並べるといずれも長方形の形にできる。






全体の長方形は、

タテ：$1 + 2 + 3 + 4 = \dfrac{4(4+1)}{2}$

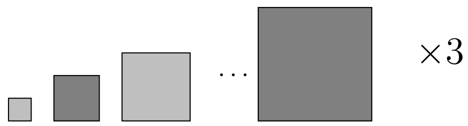
ヨコ：$2 \times 4 + 1$

面積は、$3\sum_{k=1}^{4} k^2 = (2 \times 4 + 1)\dfrac{4(4+1)}{2}$

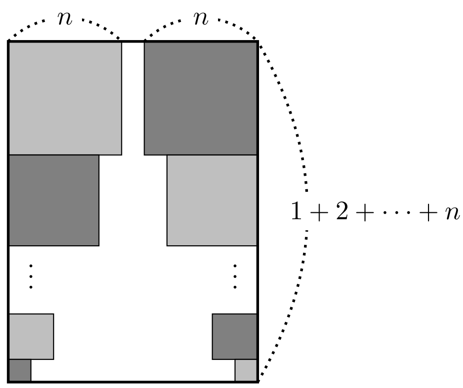
**問** $\sum_{k=1}^{n} k^2$ の公式を面積図を使って導け。

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

タイルを $1 \times 1$、$2 \times 2$、$\cdots$、$n \times n$ を 3 セット用意する。




これを全体が長方形になるように並べていく。




この長方形は、

タテ：$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{(1+n)n}{2}$

ヨコ：$(2n+1)$

だから、長方形の面積：$(2n+1)\dfrac{(1+n)n}{2}$

これはタイル 3 セット分なので、以下の式がなりたつ。

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = (2n+1)\frac{(1+n)n}{2}$$

したがって、

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$