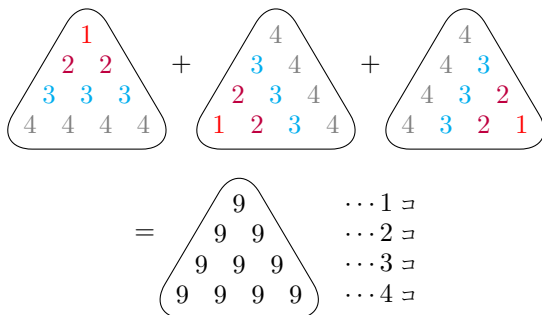


Σの公式 (2) 自然数の2乗の和

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

なぜこの式が成り立つのか？

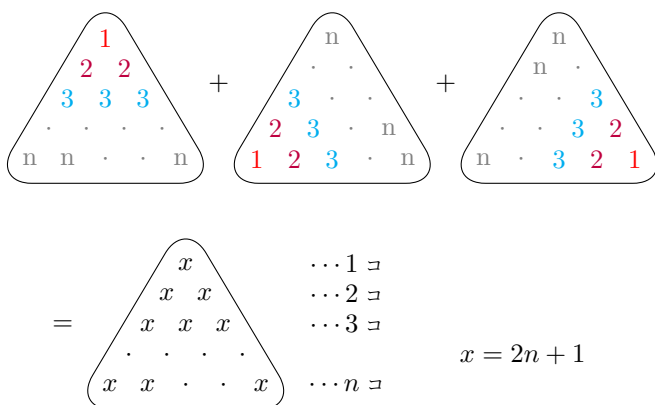
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^4 k^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \\ &= (1 \times 1) + (2 \times 2) + (3 \times 3) + (4 \times 4) \\ &= (1) + (2 + 2) + (3 + 3 + 3) + (4 + 4 + 4 + 4)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^4 k^2 &= \frac{1}{3} \times 9 \times (1 + 2 + 3 + 4) \\ &= \frac{1}{3} \times 9 \times \frac{4 \times 5}{2} = 30\end{aligned}$$

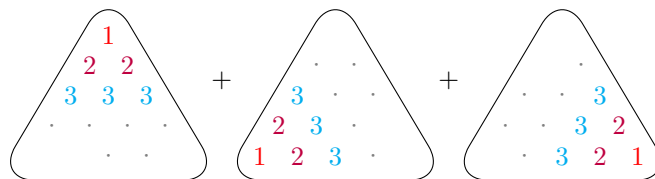
これを一般化してみよう。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \\ &= (1) + (2+2) + (3+3+3) + \cdots + (n+n+\cdots+n) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{1}{3} \cdot x \cdot \frac{(1+n)n}{2} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

問 39 下の図を完成させ、 $\sum_{k=1}^n k^2$ の値を求めなさい。



$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
x \\
x \quad x \\
x \quad x \quad x \\
. \quad . \quad . \quad . \\
(x \quad x \quad . \quad . \quad x)
\end{array}
\end{array}
=
\begin{array}{c}
\cdots 1 \sqsupset \\
\cdots 2 \sqsupset \\
\cdots 3 \sqsupset \\
\cdots (\quad) \sqsupset
\end{array}
\quad x =$$

$$\sum_{k=1}^{10} k^2 =$$

答

例 13 次の和を求めよ。

$$(1) \sum_{k=1}^{20} k^2$$

$$(2) \sum_{k=1}^{20} 2k^2$$

(3) $3^2 + 6^2 + 9^2 + \dots + 60^2$

問 40 次の和を求めよ。

$$(1) \sum_{k=1}^{12} k^2$$

$$(2) \sum_{k=1}^{12} 2k^2$$

(3) $4^2 + 8^2 + 12^2 + \dots + 48^2$

