初項 7、公比 3、項数 5 の等比数列の和 S を求める。

$$S = 7 + 21 + 63 + 189 + 567$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} S = & 7 & +21 & +63 & +189 & +567 & \\ -)\quad 3S = & & 21 & +63 & +189 & +567 & +1701 \\ \hline -2S = & 7 & & & & & -1701 \end{array}$$

$$S = \frac{7 - 1701}{-2} = 847$$

等比数列の和 (1)

初項 a、末項 ℓ、公比 r の等比数列の和 S_n

$(r \neq 1$ のとき$)$　$S_n = \dfrac{a - \ell r}{1 - r}$

$(r = 1$ のとき$)$　$S_n = na$

$(r \neq 1$ のとき$)$

$$\begin{array}{rllllll} S_n = & a & +ar & +ar^2 & +ar^3 & +\cdots & +\ell \\ -)\quad rS_n = & & ar & +ar^2 & +ar^3 & +ar^4 +\cdots & +\ell r \\ \hline (1-r)S_n = & a & & & & & -\ell r \end{array}$$

$$S_n = \frac{a - \ell r}{1 - r}$$

$(r = 1$ のとき$)$

$$\begin{aligned} S_n &= a + a + a + a + \cdots + a \\ &= na \end{aligned}$$

例 24　次の等比数列の和を求めよ。

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots + 512$$

答

問 24　次の等比数列の和を求めよ。

$$S = 8 + 40 + 200 + 1000 + 5000$$

答

末項 ℓ の代わりに項数 n が与えられた場合

末項は、$\ell = a_n = ar^{n-1}$　、これを和の式 ℓ に代入

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a - \ell\, r}{1 - r} \\ &= \frac{a - ar^{n-1} \cdot r}{1 - r} \\ &= \frac{a - ar^n}{1 - r} \\ &= \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \end{aligned}$$

等比数列の和 (2)

初項 a、項数 n、公比 r の等比数列の和 S_n

$(r \neq 1$ のとき$)$　$S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$

例 25　次の等比数列の和 S_n を求めよ。

(1) 初項 20、公比 3、項数 4

答　$S_n =$

(2) 初項 6、公比 -2、項数 5

答　$S_n =$

(3) 初項 4、公比 1、項数 6

答　$S_n =$

問 25　次の等比数列の和 S_n を求めよ。

(1) 初項 5、公比 2、項数 6

答　$S_n =$

(2) 初項 7、公比 -3、項数 4

答　$S_n =$

(3) 初項 -3、公比 1、項数 5

答　$S_n =$

例 26　初項 5、公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

答　$S_n =$

問 26　次の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1) 初項 2、公比 3

答　$S_n =$

(2) 初項 3、公比 $-\dfrac{1}{2}$

答　$S_n =$

++*+*+*+*+*+*+ 【解答】*+*+*+*+*+*+*+*+

例 24

初項 1、末項 512、公比 2 の等比数列の和であるので、

$$S=\frac{1-512\times 2}{1-2}=1023$$

答 $S=1023$

問 24

初項 8、末項 5000、公比 5 の等比数列であるので、

$$S=\frac{8-5000\times 5}{1-5}=\frac{-24992}{-4}=6248$$

答 $S=6248$

例 25

(1) 初項 20、公比 3、項数 4

$$S_n=\frac{20(1-3^4)}{1-3}=\frac{20(1-81)}{-2}=800$$

答 $S_n=800$

(2) 初項 6、公比 −2、項数 5

$$S_n=\frac{6\{1-(-2)^5\}}{1-(-2)}=\frac{6(1+32)}{3}=66$$

答 $S_n=66$

(3) 初項 4、公比 1、項数 6

$$\begin{aligned}S_n&=4+4+\cdots+4\\&=4\times 6=24\end{aligned}$$

答 $S_n=24$

問 25

(1) 初項 5、公比 2、項数 6

$$S_n=\frac{5(1-2^6)}{1-2}=\frac{5(1-64)}{-1}=315$$

答 $S_n=315$

(2) 初項 7、公比 −3、項数 4

$$S_n=\frac{7\{1-(-3)^4\}}{1-(-3)}=\frac{7(1-81)}{4}=-140$$

答 $S_n=-140$

(3) 初項 −3、公比 1、項数 5

$$\begin{aligned}S_n&=(-3)+(-3)+\cdots+(-3)\\&=(-3)\times 5=-15\end{aligned}$$

答 $S_n=-15$

例 26

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{5\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{2}{3}}\\&=\frac{5\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}}{\frac{1}{3}}\\&=5\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}\div\frac{1}{3}\\&=5\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}\times\frac{3}{1}\\&=15\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}\end{aligned}$$

答 $S_n=15\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$

問 26

(1) 初項 2、公比 3

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{2(1-3^n)}{1-3}\\&=\frac{2(1-3^n)}{-2}\\&=-(1-3^n)\\&=3^n-1\end{aligned}$$

答 $S_n=3^n-1$

(2) 初項 3、公比 $-\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{3\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\\&=\frac{3\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{\frac{3}{2}}\\&=3\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}\div\frac{3}{2}\\&=3\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}\times\frac{2}{3}\\&=2\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}\end{aligned}$$

答 $S_n=2\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$