等差数列の和

初項 a、末項 ℓ、項数 n の等差数列の和 S_n は、

$$S_n = \frac{(a+\ell)\,n}{2}$$

初項 1、公差 2、項数 5 の等差数列の和

$$S = 1+3+5+7+9$$

をうまく計算できる方法がないだろうか。

$$\begin{array}{rcccccccccc} & S &=& 1 &+& 3 &+& 5 &+& 7 &+ 9 \\ +) & S &=& 9 &+& 7 &+& 5 &+& 3 &+ 1 \\ \hline & 2S &=& 10 &+& 10 &+& 10 &+& 10 &+ 10 \end{array}$$

$$S = \frac{50}{2} = 25$$

等差数列は隣接する 2 項間の差が d であることを用いて、前後を入れ替えて並べると上手く足し算ができる。

$$\begin{array}{rlllllll} & S_n = & a & +(a+d) & +(a+2d)+ & \cdots & +(\ell-d)+ & \ell \\ +) & S_n = & \ell & +(\ell-d)+ & \cdots & +(a+2d) & +(a+d)+ & a \\ \hline & 2S_n = & (a+\ell) & +(a+\ell)+ & \cdots & + \cdots & +(a+\ell) & +(a+\ell) \end{array}$$

$$2S_n = (a+\ell)\times n$$

$$S_n = \frac{(a+\ell)\,n}{2}$$

例 12　次の等差数列の和を求めよ。

(1) 初項 3、末項 47、項数 12

答　$S_{12} =$

(2) 初項 5、公差 2、項数 10

答　$S_{10} =$

(3) 初項 2、公差 5、項数 n

答　$S_n =$

問 12　次の等差数列の和を求めよ。

(1) 初項 -4、末項 36、項数 11

答　$S_{11} =$

(2) 初項 40、公差 -4、項数 6

答　$S_6 =$

(3) 初項 5、公差 3、項数 n

答　$S_n =$

例 13　等差数列 $70, 67, 64, \cdots, 13$ の和 S を求めよ。

答　$S =$

問 13　次の等差数列の和を求めよ。

(1) $5, 8, 11, \cdots, 35$

答　$S =$

(2) $100, 96, 92, \cdots, 40$

答　$S =$

++*+*+*+*+*+*+ 【解答】*+*+*+*+*+*+*+*+

例 12

(1) 初項 3、末項 47、項数 12

$$S_{12} = \frac{(3+47)\cdot 12}{2} = 300 \qquad \boxed{答}\ S_{12} = 300$$

(2) 初項 5、公差 2、項数 10

末項：$a_{10} = 5 + 2\cdot 9 = 23$

$$S_{10} = \frac{(5+23)\cdot 10}{2} = 140 \qquad \boxed{答}\ S_{10} = 140$$

(3) 初項 2、公差 5、項数 n

末項：$a_n = 2 + 5(n-1) = 5n - 3$

$$S_n = \frac{\{2+(5n-3)\}\cdot n}{2} = \frac{(5n-1)n}{2}$$

$$\boxed{答}\ S_n = \frac{(5n-1)n}{2}$$

問 12

(1) 初項 -4、末項 36、項数 11

$$S_{11} = \frac{(-4+36)\cdot 11}{2} = 176 \qquad \boxed{答}\ S_{11} = 176$$

(2) 初項 40、公差 -4、項数 6

末項：$a_6 = 40 - 4\cdot 5 = 20$

$$S_6 = \frac{(40+20)\cdot 6}{2} = 180 \qquad \boxed{答}\ S_6 = 180$$

(3) 初項 5、公差 3、項数 n

末項：$a_n = 5 + 3(n-1) = 3n + 2$

$$S_n = \frac{\{5+(3n+2)\}n}{2} = \frac{(3n+7)n}{2}$$

$$\boxed{答}\ S_n = \frac{(3n+7)n}{2}$$

例 13 等差数列 $70, 67, 64, \cdots, 13$ の和 S を求めよ。

この数列の項数 n を求める。

$$\begin{aligned} a_n &= 70 - 3(n-1) \\ &= -3n + 73 = 13 \\ -3n &= -60 \\ n &= 20 \end{aligned}$$

$$S = \frac{(70+13)\cdot 20}{2} = 830$$

$$\boxed{答}\ S = 830$$

問 13

(1) $5, 8, 11, \cdots, 35$

この数列の項数 n を求める。

$$\begin{aligned} a_n &= 5 + 3(n-1) \\ &= 3n + 2 = 35 \\ 3n &= 33 \\ n &= 11 \end{aligned}$$

$$S = \frac{(5+35)\cdot 11}{2} = 220$$

$$\boxed{答}\ S = 220$$

(2) $100, 96, 92, \cdots, 40$

この数列の項数 n を求める。

$$\begin{aligned} a_n &= 100 - 4(n-1) \\ &= -4n + 104 = 40 \\ -4n &= -64 \\ n &= 16 \end{aligned}$$

$$S = \frac{(100+40)\cdot 16}{2} = 1120$$

$$\boxed{答}\ S = 1120$$