

例 40 循環小数 $0.\dot{2}4$ を分数で表せ。

問 40 次の循環小数を分数で表せ。

(1) $0.\dot{7}$

(2) $0.4\dot{5}$

(3) $2.\dot{3}4\dot{5}$

分数が無限小数となる場合、なぜ循環するのか？

たとえば、 $\frac{2}{7}$ は、 $2 \div 7$ と同じ意味である。2 が被除数で、7 が除数である。筆算を行うと、以下に見るようにそれぞれの桁で出た「余り」を除数で割るという作業を繰り返す行う。「余り」は除数 7 より小さい。

$$\begin{array}{r} 0.28571 \\ 7 \overline{) 2.00000} \\ \underline{14} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 40 \\ \underline{35} \\ 50 \\ \underline{49} \\ 10 \\ \underline{7} \\ 3 \end{array}$$

2 つの整数 m, n で作られる分数 $\frac{m}{n}$ は $m \div n$ である。この結果が無限小数となる場合、それぞれの桁で生じる「余り」は、除数 n よりも小さい数字である。したがって、「余り」の数の種類は除数 n の数以下となる。 $n + 1$ 回目までに同じ「余り」が発生する。それ以降は、同じ計算が繰り返されることとなるため、分数を小数に直した場合には、循環する。

