

例 40 循環小数 $0.\dot{2}\dot{4}$ を分数で表せ。

問 40 次の循環小数を分数で表せ。

$$(1) \quad 0.\dot{7}$$

$$(2) \quad 0.4\dot{5}$$

$$(3) \quad 2.\dot{3}4\dot{5}$$

分数が無限小数となる場合、なぜ循環するのか？

たとえば、 $\frac{2}{7}$ は、 $2 \div 7$ と同じ意味である。2 が被除数で、7 が除数である。筆算を行うと、以下に見るようにそれぞれの桁で出た「余り」を除数で割るという作業を繰り返し行う。「余り」は除数 7 より小さい。

$$\begin{array}{r} 0.28571 \\ 7) 2.00000 \\ \underline{-14} \\ \hline 60 \\ \underline{-56} \\ \hline 40 \\ \underline{-35} \\ \hline 50 \\ \underline{-49} \\ \hline 10 \\ \underline{-7} \\ \hline 3 \end{array}$$

2つの整数 m, n で作られる分数 $\frac{m}{n}$ は $m \div n$ である。この結果が無限小数となる場合、それぞれの桁で生じる「余り」は、除数 n よりも小さい数字である。したがって、「余り」の数の種類は除数 n の数以下となる。 $n + 1$ 回目までに同じ「余り」が発生する。それ以降は、同じ計算が繰り返されることとなるため、分数を小数に直した場合には、循環する。

* + * + * + * + * + * + * + * + * + * + * + * + * + * + * + * + * + * +

例 40

$x = 0.2\dot{4}$ とする。

$$\begin{array}{r} 100x = 24.24\ 24\ 24\ 24\cdots \\ -) \qquad x = 0.24\ 24\ 24\ 24\cdots \\ \hline 99x = 24 \end{array}$$

$$x = \frac{24}{99} = \frac{8}{33}$$

問 40

(1) 0.7

$x = 0.\dot{7}$ とする。

$$\begin{array}{r} 10x = 7.7777\cdots \\ -) \quad x = 0.7777\cdots \\ \hline 9x = 7 \end{array}$$

$$x = \frac{7}{9}$$

(2) 0.45

$x = 0.\dot{4}\dot{5}$ とする。

$$\begin{array}{r} 100x = 45.45\ 45\ 45\ 45\dots \\ -) \qquad x = 0.45\ 45\ 45\ 45\dots \\ \hline 99x = 45 \end{array}$$

$$x = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$$

(3) 2.345

$x = 2.\dot{3}4\dot{5}$ とする。

$$\begin{array}{r} 1000x = 2345.345\ 345\ 345\dots \\ -) \qquad x = 2.345\ 345\ 345\dots \\ \hline 999x = 2343 \end{array}$$

$$x = \frac{2343}{999} = \frac{781}{333}$$