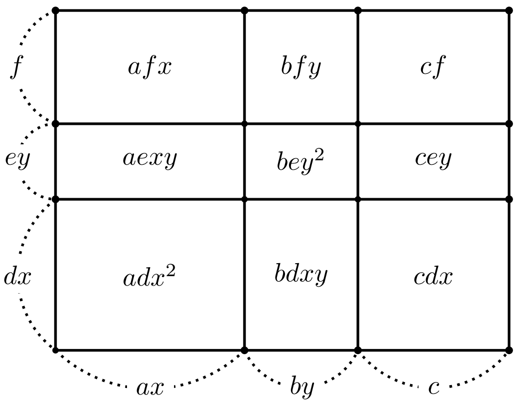
! x と y の 2 次式を 面積図で因数分解

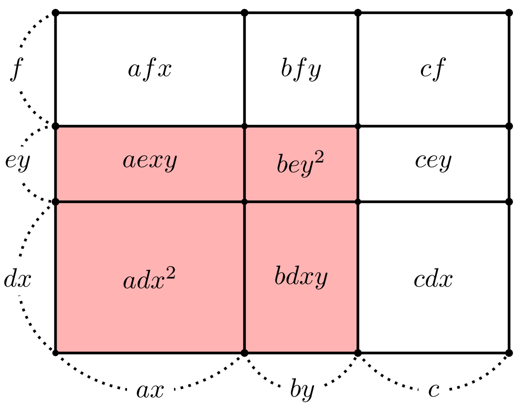
x と y の 2 変数 2 次式の因数分解は、以下の式のように、x と y の一次式の積で表すことができます。なぜこの形に決まるかと言えば、2 次式が因数分解できるなら、1 次式と 1 次式の積となるからである。左辺が x と y の 2 次式なので、右辺は x と y の一次式どうしの積となります。したがって、一般的な形式で表すと次のような式になります。

$$px^2+qxy+ry^2+sx+ty+u=(ax+by+c)(dx+ey+f)$$

この式を面積図で表すと、次のようになります。



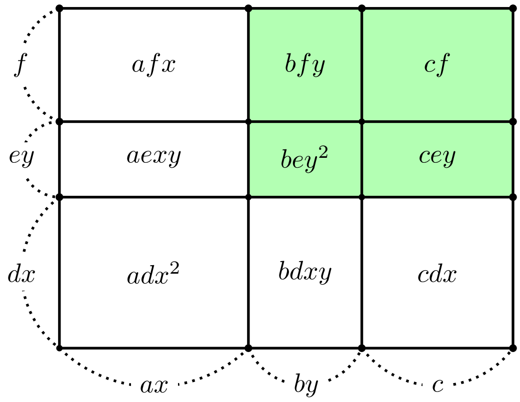
ここで左下の 2×2 の長方形の赤色の部分に着目します。



この赤色の部分の面積は、$(ax+by)(dx+ey)$ であり、これは変数の次数に着目すれば、与式の左辺の $px^2+qxy+ry^2$ に一致しなければなりません。
したがって、以下の式が成り立ちます。

$$px^2+qxy+ry^2=(ax+by)(dx+ey)$$

部分的な因数分解を解くことで、a, b, d, e を求めることができます。
このアプローチはもう一つあります、次のように x の無い部分だけに着目すると、



上記の緑の部分の面積は $(by+c)(ey+f)$ となりますが、この面積は、与式の ry^2+ty+u と一致しなければなりません。

$$ry^2+ty+u=(by+c)(ey+f)$$

部分的な因数分解をすることで、b, c, e, f の値を決定することができるのです。
まとめると、以下の 2 つの方程式のいずれかを先に解くことで、求めなければならない 6 つの数字のうち 4 つを決定することができるということになります。

$$px^2+qxy+ry^2=(ax+by)(dx+ey)$$
$$ry^2+ty+u=(by+c)(ey+f)$$

$p=ad$, $r=be$, $u=cf$ のうちどれかが素数であれば、この因数分解は簡単になるので、素数を含む方の因数分解から手をつけるのが良いでしょう。いずれの方法を選択したとしても、残り 2 つの値は係数比較で解くことができます。

Example1

$3x^2-2xy-y^2-11x-y+6$ を因数分解せよ。

因数分解した式を $(ax+by+c)(dx+ey+f)$ とする。
すると、$3x^2-2xy-y^2=(ax+by)(dx+ey)$ である。
左辺の因数分解は、$(3x+y)(x-y)$ であるので、

$$与式=(3x+y+c)(x-y+f)$$

この式を展開して x と y の係数が与式と一致するはずだから、

$$\begin{cases}3f+c=-11\\ f-c=-1\end{cases}$$

この連立方程式を解くと、$f=-3, c=-2$ これは、$cf=6$ を満たす。

$$与式=(3x+y-2)(x-y-3)$$

Exercise1

$3x^2+13xy+4y^2-10x+26y-48$ を因数分解せよ。

因数分解した式を $(ax+by+c)(dx+ey+f)$ とすると、$3x^2+13xy+4y^2=(ax+by)(dx+ey)$ とできます。
左辺を因数分解すると、$(3x+y)(x+4y)$ なので、

$$与式 = (3x+y+c)(x+4y+f)$$

x と y の係数が一致するはずであるから、

$$\begin{cases} 3f+c=-10 \\ f+4c=26 \end{cases}$$

この連立方程式を解くと $c=8,\ f=-6$。これは $cf=-48$ を満たす。

$$与式 = (3x+y+8)(x+4y-6)$$

! 因数分解できる式は特別な式

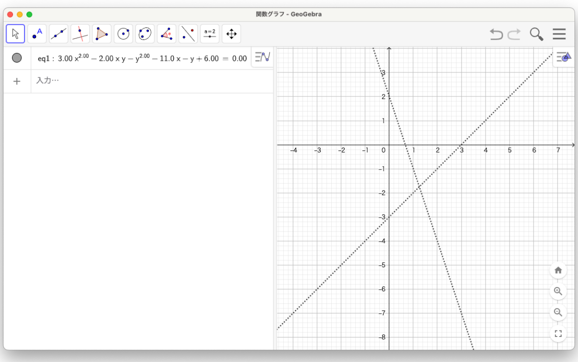
さて、因数分解は何のためにしているのかということに立ち戻りましょう。私は因数分解の単元の最初に、「因数分解は方程式を解くためにあるのです」とみなさんにお話ししました。
ならば、今取り組んでいる、次のような因数分解にどのような意味があるのかを少し考えてみましょう。

$$3x^2-2xy-y^2-11x-y+6=(3x+y-2)(x-y-3)$$

左辺 $=0$ となる方程式を考えてみます。すなわち、

$$3x^2-2xy-y^2-11x-y+6=0$$

です。この式は x と y の 2 つの変数を持っています。それぞれ適切な値を入れると 0 になるような特別な (x,y) の組がありますが、そのような (x,y) の集合を表しています。GeoGebra に、この式をを入れてみましょう。すると次のような特徴のあるグラフが出現します。



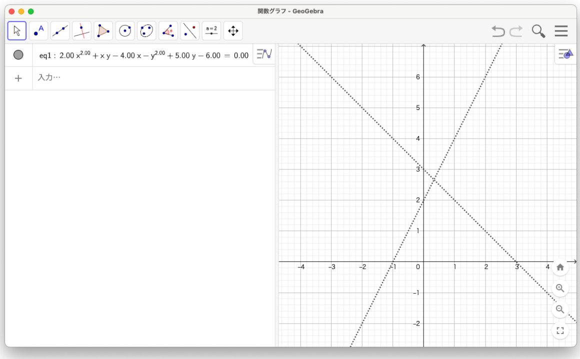
このグラフは 2 本の直線です。どういう意味かを考えてみましょう。入力した方程式の左辺は因数分解できるので、次の式と同じです。

$$(3x+y-2)(x-y-3)=0$$

因数分解した形は、大きな掛け算の形になっています。方程式では、掛け算したものが $=0$ となっているので、$(3x+y-2)=0$ あるいは $(x-y-3)=0$ でなければなりません。
$3x+y-2=0$ を変形すると、$y=-3x+2$ となり、$x-y-3=0$ を変形すると、$y=x-3$ が出てきます。
この 2 つの直線は、GeoGebra が描いた 2 本の直線です。

Exercise2

$2x^2+xy-4x-y^2+5y-6=0$ のグラフを GeoGebra で描いてみよう。

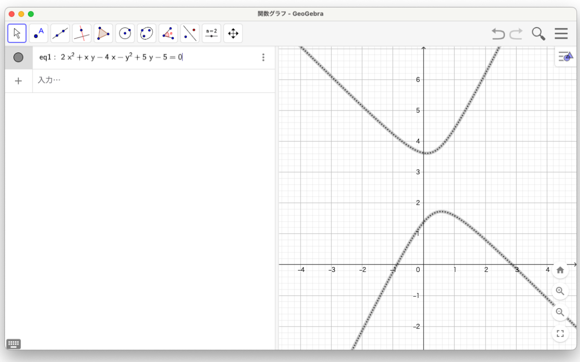


2 本の直線は $y=-x+3$ と $y=2x+2$ となっているので、これを $=0$ と変形すると $x+y-3=0$、$2x-y+2=0$ であるので、この式の因数分解を、$(x+y-3)(2x-y+2)$ とすることができるということが分かります。

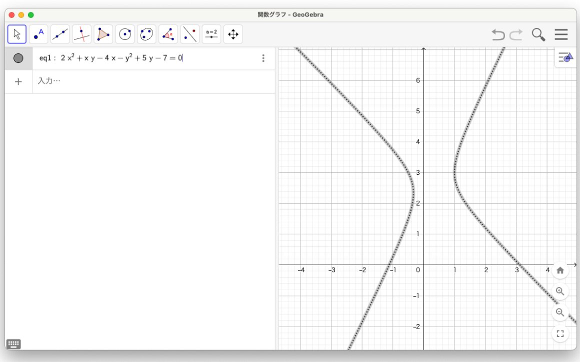
Example 2

$2x^2+xy-4x-y^2+5y-t=0$ において、
$t=5$ と $t=7$ のときのグラフを描いてみよう。

$t=5$ のとき、



$t=7$ のとき、



t の値を動かすと、2 本の交わらない曲線になることが表示されます。因数分解できるということは、2 本の直線になるという極めて特殊な状態であることが分かります。