## ! GeoGebla を使って展開してみよう

**GeoGebla** は、世界の中学生、高校生が利用している数学アプリです。関数のグラフや幾何図形を描かせたり、方程式を解く、因数分解や微分積分などの計算もできます。PC のみならず、タブレットでも利用可能で、無料でインストールが可能です。Web アプリで利用もできます。

https://www.geogebra.org/

今回は **GeoGebla** の数式処理 (CAS) を使って展開することから、逆の操作の因数分解を考えます。

**Example1**

$(x+y+3)(x+2y+4)$
を GeoGebla を使って展開してみよう。

因数分解するコマンドは、`Expand(式)` です。以下のように左上の数式入力ボックスに入力します。

```
Expand((x+y+3)(x+2y+4))
```

**Point**

- $x^2$ は `x^2` と入力します。
- 括弧が二重になっている

以下のような出力がでます。

$$x^{2.00}+3.00xy+7.00x+2.00y^{2.00}+10.0y+12.0$$

**Exercise1**

次の式を GeoGebla を使って展開してみよう。
(1)　$(x+2y-3)(x+y+7)$
(2)　$(x+4y+2)(x-y+5)$

答
(1)　$x^2+3xy+4x+2y^2+11y-21$
(2)　$x^2+3xy+7x-4y^2+18y+10$

**Exercise2**

$(x+by+c)(x+ey+f)$ を展開したとき、
$xy$ の係数が $+3$ になるような $(b,e)$ の組み合わせをできるだけたくさん求めてください。

$$x^2+3xy+ry^2+sx+ty+u$$

例
$(b,e)=(1,2),\ (2,1),\ (4,-1),\ (-1,4)\cdots$
$(5,-2),\ (6,-3),\ (7,-4),\cdots$

このことから、$(x+by+c)(x+ey+f)$ を展開したとき、$xy$ の係数が $+3$ になるような $(b,e)$ の組み合わせは、$b+e=3$ となることが分かります。また展開したあとの $y^2$ の係数は $r=b\times e$ であることも明らかです。

$x^2+3xy-10y^2+4x-y+3$ の因数分解を答えから逆算してみましょう。

$$x^2+3xy-10y^2+4x-y+3 \quad \cdots\cdots ①$$
$$=(x+by+c)(x+ey+f) \quad \cdots\cdots ②$$

$xy$ の係数が $+3$、$y^2$ の係数が $-10$ であることから、和が $+3$、積が $-10$ となるような 2 数 $b,e$ を考えます。そのような 2 数は、$+5$ と $-2$ です。

$$x^2+3xy-10y^2+4x-y+3$$
$$=(x+5y+c)(x-2y+f) \quad \cdots\cdots ②'$$

②′ を展開して、$+4x$ と $-y$ が出てくるためには、

$$\begin{cases} f+c=4 \\ 5f-2c=-1 \end{cases}$$

連立すると、$f=1,\ c=3$ となり、因数分解が完成します。
$x^2+3xy-10y^2+4x-y+3=(x+5y+3)(x-2y+1)$

**問 33**　次の式を因数分解せよ。

(1)　$x^2+3xy+2y^2-x-3y-2$
(2)　$3x^2-2xy-y^2-11x-y+6$

答
(1)　$x^2+3xy+2y^2-x-3y-2$

結果を $(x+by+c)(x+ey+f)$ と仮定する。
$xy$ の係数 $+3$ と、$y^2$ の係数 $+2$ から、$b=2,\quad e=1$
　与式 $=(x+2y+c)(x+1y+f)$
$x$ の係数 $-1$、$y$ の係数 $-3$ だから、

$$\begin{cases} f+c=-1 \\ 2f+c=-3 \end{cases}$$

連立方程式を解くと、$f=-2,\ c=+1$
　与式 $=(x+2y+1)(x+y-2)$

(2)　$3x^2-2xy-y^2-11x-y+6$

結果を $(ax+y+c)(dx-y+f)$ と仮定する。
$x^2$ の係数が 3、$xy$ の係数が $-2$ であることから、
$ad=3,\ d-a=-2$ より、$a=3,\ d=1$ である。
　与式 $=(3x+y+c)(1x-y+f)$
$x$ の係数 $-11$、$y$ の係数 $-1$ より、

$$\begin{cases} 3f+c=-11 \\ f-c=-1 \end{cases}$$

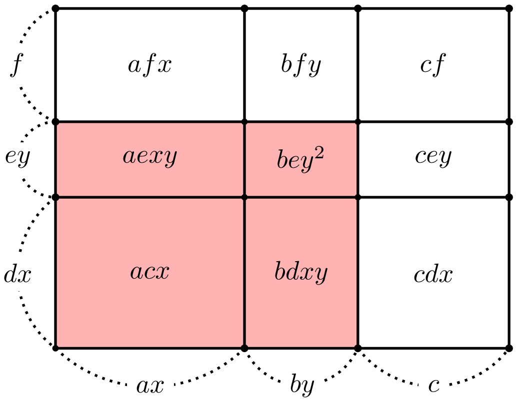
連立方程式を解くと、$f=-3,\ c=-2$
　与式 $=(3x+y-2)(x-y-3)$

## 0.1 タスキがけを用いない $x$ と $y$ の 2 次式の因数分解の方法

$x$ と $y$ の 2 変数 2 次式の因数分解は、以下の式のように、$x$ と $y$ の一次式の積で表すことができる。なぜなら、2 次式が因数分解できるなら、1 次式と 1 次式の積となるからである。

$$px^2+qxy+ry^2+sx+ty+u=(ax+by+c)(dx+ey+f)$$

右辺について、横が $(ax+by+c)$、縦 $(dx+ey+f)$ の長方形で表すと、以下のようになる。

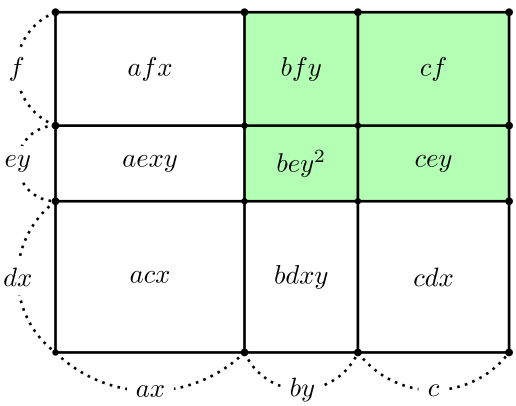



ここで、色をつけた部分に注目すると、$(ax+by)(dx+ey)$ の因数分解と全く同じである。すなわち、2 次の項だけに着目して、

$$px^2+qxy+ry^2=(ax+by)(dx+ey)$$

の因数分解を行うことで、$p,\ q,\ r$ の 3 つから、$a,\ b,\ d,\ e$ を求め、そのあと $c,\ f$ を算出することができる。

別のアプローチもある、次のように $x$ の文字を排除して、y と定数の因数分解から先にしても良い。




上記の緑色の部分は、以下の部分的な因数分解となってる。

$$ry^2+ty+u=(by+c)(ey+f)$$

これにより、$r,\ t,\ u$ から $b,c,e,f$ の 4 つを求めてから、後に $a,d$ を求めるということもできる。
もしも、与えられた問題で $ac$、$be$、$cf$ のいずれかが素数であれば、上記のいずれかを用いて簡単に $a,b,c,d,e,f$ を決定することができる。タスキがけでないと解けないということではない。
$3x^2-2xy-y^2-11x-y+6$ の因数分解の場合、
$(ax+by+c)(dx+ey+f)$ がその解であるとする。
与式の中の 2 次の項だけに着目し $3x^2-2xy-y^2$ を因数分解すると、$(x-y)(3x+y)$ となる。したがって、4 つの数字が決まる。

$$(x-y+c)(3x+y+f)$$

この式を展開すれば、

$$3x^2-2xy-y^2+(3c+f)x+(c-f)y+cf$$

であるので、与式と係数比較をすれば、$c,f$ を決定することができる。