GeoGebra を使って因数分解してみよう

GeoGebra は、世界の中学生、高校生が利用している数学アプリです。関数のグラフや幾何図形を描かせたり、方程式を解く、因数分解や微分積分などの計算もできます。PC のみならず、タブレットでも利用可能で、無料でインストールが可能です。Web アプリで利用もできます。

https://www.geogebra.org/

今回は **GeoGebra** の数式処理 (CAS) を使って因数分解について考えてみます。

Example1

$x^2+2xy+y^2+5x+5y+6$
を GeoGebra を使って因数分解してみよう。

因数分解するコマンドは、`Factor(式)` です。以下のように左上の数式入力ボックスに入力します。

```
Factor(x^2+2x y+y^2+5x+5y+6)
```

Point

- x^2 は `x^2` と入力します。
- $2xy$ は、x と y の間に半角スペースが必要です。

以下のような出力がでます。
→ `(x+y-2.00)(x+y+3.00)`

Exercise1

次の式を GeoGebra を使って因数分解してみよう。
(1)　$x^2+3xy+2y^2-x-5y-12$
(2)　$3x^2+4xy+y^2-17x-7y+10$

答
(1)　$(x+y-4)(x+2y+3)$
(2)　$(x+y-5)(3x+y-2)$

Exercise2

以下の式で、因数分解ができる数字 (s,t,u) の組み合わせをできるだけたくさん見つけてください。

$$x^2+2xy+y^2+sx+ty+u$$

例
$(s,t,u)=(2,2,1),\ (4,4,4),\ (6,6,9),\ (8,8,16)\cdots$
$(3,3,2),\ (4,4,3),\ (-2,-2,1),\ (-7,-7,10)\cdots$

$x^2+2xy+y^2+sx+ty+u$ の式が因数分解できるための条件のひとつは, $s=t$ であることが分かりました。
なぜこの条件がなければならないのでしょうか？
逆に展開から考えてみましょう。上記の式が次のように因数分解できたとします。

$$x^2+2xy+y^2+sx+ty+u \quad \cdots\cdots ①$$
$$=(ax+by+c)(dx+ey+f) \quad \cdots\cdots ②$$

①で x^2 の係数が 1 ならば、$a=1,\ d=1$ となります。同様に、y^2 の係数が 1 であるので、$b=1,\ e=1$ です。したがって、上記式を書き直せば、以下のようになります。

$$x^2+2xy+y^2+sx+ty+u \quad \cdots\cdots ①$$
$$=(x+y+c)(x+y+f) \quad \cdots\cdots ②'$$

②′ を展開して、
x の 1 次の項は、$fx+cx=(f+c)x$ です。
また、y の 1 次の項は、$fy+cy=(f+c)y$ です。
したがって、x の係数と y の係数は $(f+c)$ と一致します。

また、定数項 $u=cf$ であることが分かります。

このことから、$x^2+2xy+y^2+sx+ty+u$ を因数分解したときは、和が $s=t$ であり、積が u となる 2 数 c,f を探せば、$(x+y+c)(x+y+f)$ が因数分解した式となることが分かります。

Example 2

$x^2+2xy+y^2+2x+2y-15$ を因数分解せよ。

与式 $=(ax+by+c)(dx+ey+f)$ とする。
x^2, y^2 の係数がいずれも 1 であるから、$a=b=d=e=1$
すなわち、
　与式 $=(x+y+c)(x+y+f)$
$c+f=2,\ \ cf=-15$ であるので、$c=5,\ f=-3$ よって、
　与式 $=(x+y+5)(x+y-3)$

Exercise3

$x^2+2xy+y^2+5x+5y-14$ を因数分解せよ。

与式 $=(ax+by+c)(dx+ey+f)$ とする。
x^2, y^2 の係数がいずれも 1 であるから、$a=b=d=e=1$
すなわち、
　与式 $=(x+y+c)(x+y+f)$
$c+f=5,\ \ cf=-14$ であるので、$c=7,\ f=-2$ よって、
　与式 $=(x+y+7)(x+y-2)$