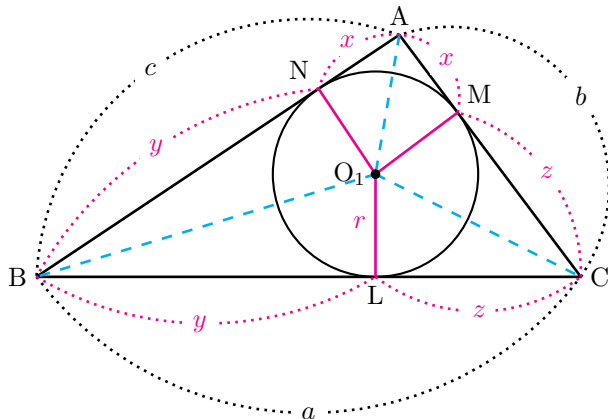


ヘロンの公式の証明 内接円と傍接円を利用した幾何学的な証明

$\triangle ABC$ に内接円をかき、その半径を r とする。図1のように、接点でそれぞれの辺を分割すると、 $a = y+z$ 、 $b = x+z$ 、 $c = x+y$ と表すことができる。

図1: 内接円の接点で辺を分割



$\triangle ABC$ の面積は、

$$S = r(x + y + z) \quad \dots\dots(1)$$

と表すことができる。

図2: $\triangle ABC$ の面積

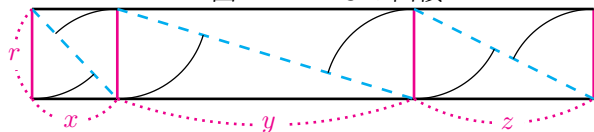
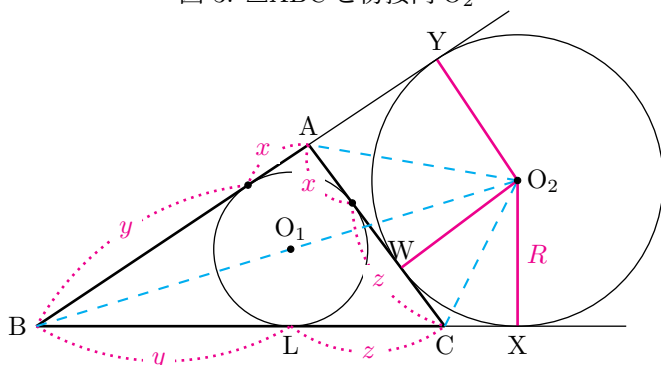


図3のように傍接円をかき、傍心を O_2 、その半径を R とする。 O_2 から三辺へ垂線を下し、その足を X, Y, Z とする。

図3: $\triangle ABC$ と傍接円 O_2



$AY = AW$ 、 $CX = CW$ となるので $BX + BY$ は $\triangle ABC$ の周の長さと同じになる。また $BY = BX$ であるので、以下の式が成り立つ。

$$\begin{cases} AY = z \\ CX = x \end{cases} \quad \dots\dots(2)$$

図4で、相似な三角形 $\triangle O_2BX$ と $\triangle O_1BL$ であるから、

$$(x + y + z) : R = y : r$$

図4: 内接円の半径 t と傍接円の半径 R の関係 (1)

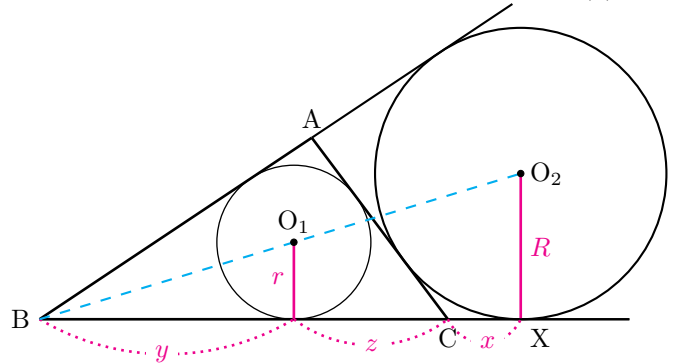
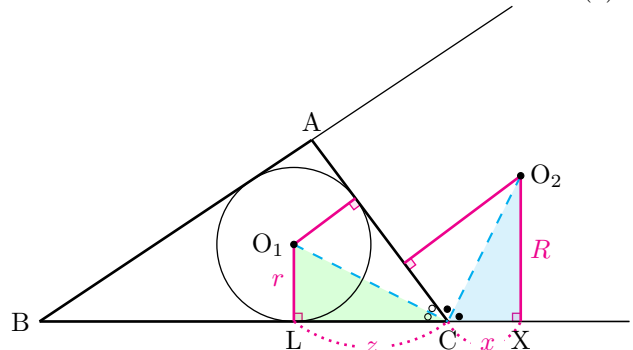


図5: 内接円の半径 t と傍接円の半径 R の関係 (2)



$$r(x + y + z) = yR \quad \dots\dots(3)$$

図5で CO_1 と CO_2 は角の二等分線なので、 $O_1CO_2 = 90^\circ$ 。したがって、 $\triangle O_1LC$ と $\triangle XCO_2$ は相似となる。

$$z : r = R : x$$

$$rR = xz \quad \dots\dots(4)$$

さて、(3) 式と (4) 式を辺々掛けると

$$r^2R(x + y + z) = xyzR$$

R で割り、両辺に $(x + y + z)$ を掛けると、

$$r^2(x + y + z)^2 = (x + y + z)xyz$$

(1) 式により、左辺は S^2 となるから、

$$S^2 = (x + y + z)xyz \quad \dots\dots(5)$$

ここで、 $s = x + y + z$ とすると、図1より、

$$s = a + x, \quad s = b + y, \quad s = c + z$$

$$x = s - a, \quad y = s - b, \quad z = s - c$$

であるから、式(5)は以下のように書き直すことができる。

$$S^2 = s(s - a)(s - b)(s - c)$$

S, s, a, b, c は正であるので、

$$S = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$