三角関数の合成

$A\sin\theta + B\cos\theta$ は、ひとつの波になる。

$$r\cos\alpha\cdot\sin\theta + r\sin\alpha\cdot\cos\theta = r\sin(\theta+\alpha)$$

例 1　関数 $y = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$ の最大値と最小値を求めよ。

答　最大値　　　，最小値

問 1　次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1)　$y = 3\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$

答　最大値　　　，最小値

(2)　$y = 12\sin\theta - 5\cos\theta$

答　最大値　　　，最小値

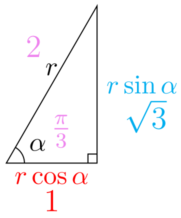
例 2　$0 \leqq \theta < \pi$ のとき、$y = \sin\theta + \cos\theta$ の最大値と最小値、その時の θ を求めよ。

問 2　$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき、$y = 2\sin\theta - 2\cos\theta$ の最大値と最小値、その時の θ を求めよ。

++*+*+*+*+*+*+ 【解答】*+*+*+*+*+*+*+*+

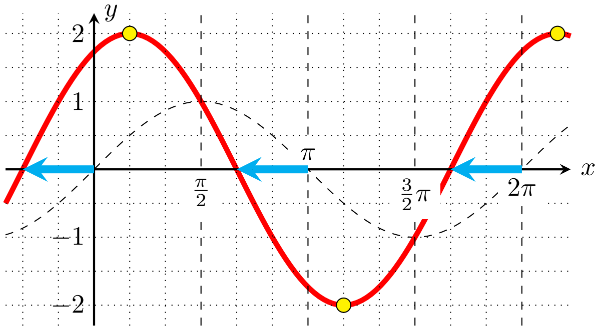
例 1　関数 $y = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$ の最大値と最小値を求めよ。

$$\underset{\substack{\downarrow \\ r\cos\alpha}}{1}\ \sin\theta + \underset{\substack{\downarrow \\ r\sin\alpha}}{\sqrt{3}}\ \cos\theta$$



$$y = 2\cos\tfrac{\pi}{3}\sin\theta + 2\sin\tfrac{\pi}{3}\cos\theta$$
$$= 2\sin(\theta + \tfrac{\pi}{3})$$

答　最大値 2，最小値 -2



問 1　次の関数の最大値と最小値を求めよ。

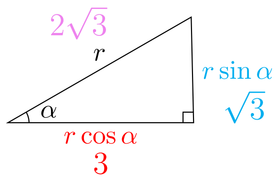
(1)　$y = 3\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$

(2)　$y = 12\sin\theta - 5\cos\theta$

(1)　$y = 3\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ r\cos\alpha}}{3}\ \sin\theta + \underset{\substack{\downarrow \\ r\sin\alpha}}{\sqrt{3}}\cos\theta$$

$r^2 = 12$
$r = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$



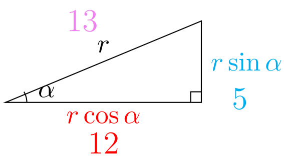
$$y = 2\sqrt{3}\cos\alpha\sin\theta + 2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\theta$$
$$= 2\sqrt{3}\sin(\theta + \alpha)$$

答　最大値 $2\sqrt{3}$，最小値 $-2\sqrt{3}$

(2)　$y = 12\sin\theta - 5\cos\theta$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ r\cos\alpha}}{12}\ \sin\theta - \underset{\substack{\downarrow \\ r\sin\alpha}}{5}\ \cos\theta$$

$r^2 = 144 + 25 = 169$
$r = \sqrt{169} = 13$



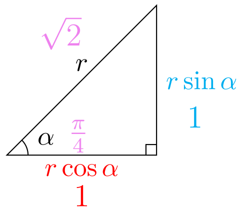
$$y = 13\cos\alpha\sin\theta - 13\sin\alpha\cos\theta$$
$$= 13\sin(\theta - \alpha)$$

答　最大値 13，最小値 -13

例 2　$0 \leqq \theta < \pi$ のとき、$y = \sin\theta + \cos\theta$ の最大値と最小値、その時の θ を求めよ。

$$\underset{\substack{\downarrow \\ r\cos\alpha}}{1}\ \sin\theta + \underset{\substack{\downarrow \\ r\sin\alpha}}{1}\ \cos\theta$$

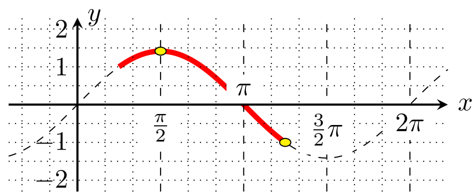
$r^2 = 1 + 1 = 2$
$r = \sqrt{2}$



$$y = \sqrt{2}\cos\tfrac{\pi}{4}\sin\theta + \sqrt{2}\sin\tfrac{\pi}{4}\cos\theta$$
$$= \sqrt{2}\sin(\theta + \tfrac{\pi}{4})$$

ここで $x = \theta + \frac{\pi}{4}$ とすると、定義域は $\frac{\pi}{4} \leqq x < \frac{5}{4}\pi$

$y = \sqrt{2}\sin x$ の最大値と最小値を求める。



$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2}\text{のとき、最大値 } \sqrt{2} \\ x = \frac{5}{4}\pi\text{のとき、最小値 } -1 \end{cases}$$

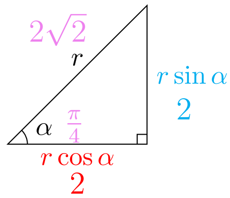
$\theta = x - \frac{\pi}{4}$ であるから、

答 $$\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{4}\text{のとき、最大値 } \sqrt{2} \\ \theta = \pi\text{のとき、最小値 } -1 \end{cases}$$

問 2　$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき、$y = 2\sin\theta - 2\cos\theta$ の最大値と最小値、その時の θ を求めよ。

$$\underset{\substack{\downarrow \\ r\cos\alpha}}{2}\ \sin\theta - \underset{\substack{\downarrow \\ r\sin\alpha}}{2}\ \cos\theta$$

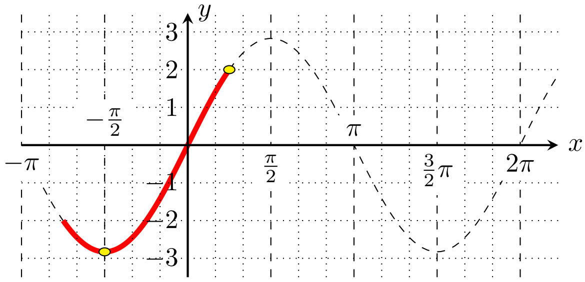
$r^2 = 4 + 4 = 8$
$r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$



$$y = 2\sqrt{2}\cos\tfrac{\pi}{4}\sin\theta - 2\sqrt{2}\sin\tfrac{\pi}{4}\cos\theta$$
$$= 2\sqrt{2}\sin(\theta - \tfrac{\pi}{4})$$

ここで $x = \theta - \frac{\pi}{4}$ とすると、定義域は $-\frac{3\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$

$y = 2\sqrt{2}\sin x$ の最大値と最小値を求める。



$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4}\text{のとき、最大値 } 2 \\ x = -\frac{\pi}{2}\text{のとき、最小値 } -2\sqrt{2} \end{cases}$$

$\theta = x + \frac{\pi}{4}$ であるから、

答 $$\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2}\text{のとき、最大値 } 2 \\ \theta = -\frac{\pi}{4}\text{のとき、最小値 } -2\sqrt{2} \end{cases}$$