

三角関数の合成

$A \sin \theta + B \cos \theta$ は、ひとつの波になる。

$$r \cos \alpha \cdot \sin \theta + r \sin \alpha \cdot \cos \theta = r \sin(\theta + \alpha)$$

例 1 関数 $y = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ の最大値と最小値を求めよ。

答 最大値 _____ , 最小値 _____

問 1 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1) $y = 3 \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$

答 最大値 _____ , 最小値 _____

(2) $y = 12 \sin \theta - 5 \cos \theta$

答 最大値 _____ , 最小値 _____

例 2

$0 \leq \theta < \pi$ のとき、 $y = \sin \theta + \cos \theta$ の最大値と最小値、その時の θ を求めよ。

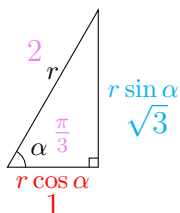
問 2

$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、 $y = 2 \sin \theta - 2 \cos \theta$ の最大値と最小値、その時の θ を求めよ。

++***+***+***+***+ 【解答】 ***+***+***+***+***+***+

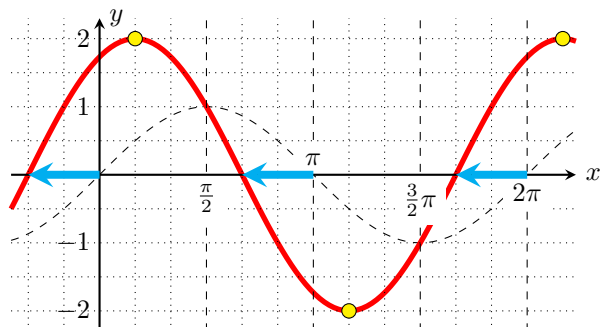
例 1 関数 $y = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ の最大値と最小値を求めよ。

$$\begin{array}{ccc} 1 & \sin \theta + & \sqrt{3} \cos \theta \\ \downarrow & & \downarrow \\ r \cos \alpha & & r \sin \alpha \end{array}$$



$$\begin{aligned} y &= 2 \cos \frac{\pi}{3} \sin \theta + 2 \sin \frac{\pi}{3} \cos \theta \\ &= 2 \sin(\theta + \frac{\pi}{3}) \end{aligned}$$

答 最大値 2, 最小値 -2



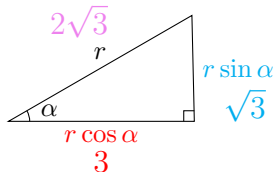
問 1 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

- (1) $y = 3 \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$
- (2) $y = 12 \sin \theta - 5 \cos \theta$

(1) $y = 3 \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$

$$\begin{array}{ccc} 3 & \sin \theta + & \sqrt{3} \cos \theta \\ \downarrow & & \downarrow \\ r \cos \alpha & & r \sin \alpha \end{array}$$

$$\begin{aligned} r^2 &= 12 \\ r &= \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$



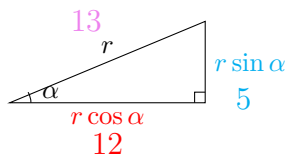
$$\begin{aligned} y &= 2\sqrt{3} \cos \alpha \sin \theta + 2\sqrt{3} \sin \alpha \cos \theta \\ &= 2\sqrt{3} \sin(\theta + \alpha) \end{aligned}$$

答 最大値 $2\sqrt{3}$, 最小値 $-2\sqrt{3}$

(2) $y = 12 \sin \theta - 5 \cos \theta$

$$\begin{array}{ccc} 12 & \sin \theta - & 5 \cos \theta \\ \downarrow & & \downarrow \\ r \cos \alpha & & r \sin \alpha \end{array}$$

$$\begin{aligned} r^2 &= 144 + 25 = 169 \\ r &= \sqrt{169} = 13 \end{aligned}$$



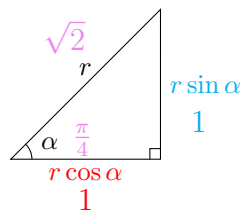
$$\begin{aligned} y &= 13 \cos \alpha \sin \theta - 13 \sin \alpha \cos \theta \\ &= 13 \sin(\theta - \alpha) \end{aligned}$$

答 最大値 13, 最小値 -13

例 2 $0 \leq \theta < \pi$ のとき、 $y = \sin \theta + \cos \theta$ の最大値と最小値、その時の θ を求めよ。

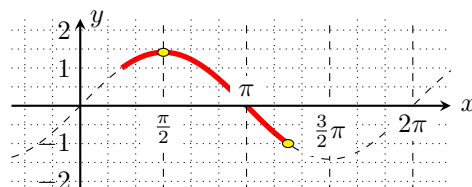
$$\begin{array}{ccc} 1 & \sin \theta + & 1 \cos \theta \\ \downarrow & & \downarrow \\ r \cos \alpha & & r \sin \alpha \end{array}$$

$$\begin{aligned} r^2 &= 1 + 1 = 2 \\ r &= \sqrt{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} y &= \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} \sin \theta + \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} \cos \theta \\ &= \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

ここで $x = \theta + \frac{\pi}{4}$ とすると、定義域は $\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{5}{4}\pi$
 $y = \sqrt{2} \sin x$ の最大値と最小値を求める。



$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \text{ のとき、最大値 } \sqrt{2} \\ x = \frac{5}{4}\pi \text{ のとき、最小値 } -1 \end{cases}$$

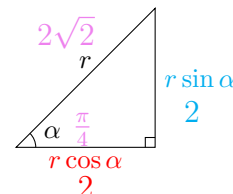
$\theta = x - \frac{\pi}{4}$ であるから、

答 $\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{4} \text{ のとき、最大値 } \sqrt{2} \\ \theta = \pi \text{ のとき、最小値 } -1 \end{cases}$

問 2 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、 $y = 2 \sin \theta - 2 \cos \theta$ の最大値と最小値、その時の θ を求めよ。

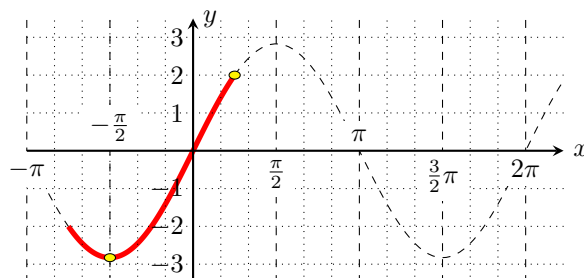
$$\begin{array}{ccc} 2 & \sin \theta - & 2 \cos \theta \\ \downarrow & & \downarrow \\ r \cos \alpha & & r \sin \alpha \end{array}$$

$$\begin{aligned} r^2 &= 4 + 4 = 8 \\ r &= \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} y &= 2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} \sin \theta - 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} \cos \theta \\ &= 2\sqrt{2} \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

ここで $x = \theta - \frac{\pi}{4}$ とすると、定義域は $-\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$
 $y = 2\sqrt{2} \sin x$ の最大値と最小値を求める。



$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \text{ のとき、最大値 } 2 \\ x = -\frac{\pi}{2} \text{ のとき、最小値 } -2\sqrt{2} \end{cases}$$

$\theta = x + \frac{\pi}{4}$ であるから、

答 $\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} \text{ のとき、最大値 } 2 \\ \theta = -\frac{\pi}{4} \text{ のとき、最小値 } -2\sqrt{2} \end{cases}$