倍角の公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

加法定理

1 $\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

2 $\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

3 $\tan(\alpha\pm\beta) = \dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

1　サインの加法定理で $\beta=\alpha$ と置き換える。

$\sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

2　コサインの加法定理で $\beta=\alpha$ と置き換える。

$\cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

3　タンジェントの加法定理で $\beta=\alpha$ と置き換える。

$\tan(\alpha+\alpha) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}$

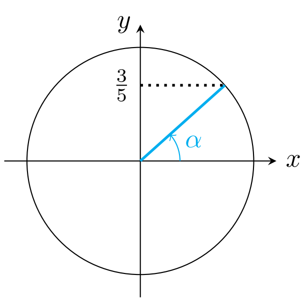
$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

例 1　$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ で、$\sin\alpha=\frac{3}{5}$ のとき、$\sin 2\alpha$、$\cos 2\alpha$ の値を求めよ。

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

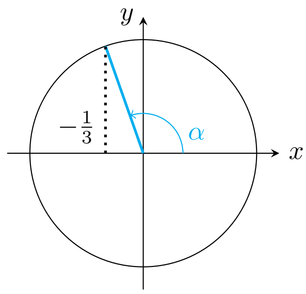
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$　$\rightarrow$　$\cos\alpha$ が必要

答　$\sin 2\alpha =$　　　　，$\cos 2\alpha =$



問 1　$\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ のとき、$\sin 2\alpha$、$\cos 2\alpha$、$\tan 2\alpha$ の値を求めよ。ただし、$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ とする。

答　$\sin 2\alpha =$　　　　，$\cos 2\alpha =$　　　　，$\tan 2\alpha =$



3 倍角の公式

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

例 2　$3\alpha = 2\alpha+\alpha$ として、次の等式を証明せよ。

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

問 2　$3\alpha = 2\alpha+\alpha$ として、次の等式を証明せよ。

$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

++*+*+*+*+*+*+ 【解答】*+*+*+*+*+*+*+*+

例 1 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ で、$\sin\alpha = \frac{3}{5}$ のとき、$\sin 2\alpha$、$\cos 2\alpha$ の値を求めよ。

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \quad \to \quad \cos\alpha$ が必要

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$
$$= 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

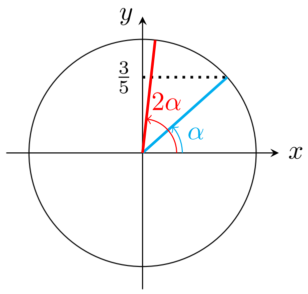
$\cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ だから、$\cos\alpha = \frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha = 2 \times \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$

$\cos 2\alpha = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$

答 $\sin 2\alpha = \frac{24}{25}$, $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$



問 1 $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ のとき、$\sin 2\alpha$、$\cos 2\alpha$、$\tan 2\alpha$ の値を求めよ。ただし、$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ とする。

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$
$$= 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$\sin\alpha = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

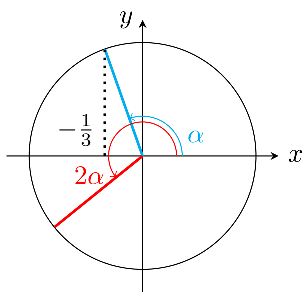
$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ なので、$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sin 2\alpha = 2 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$

$\cos 2\alpha = \frac{1}{9} - \frac{8}{9} = -\frac{7}{9}$

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{-\frac{4\sqrt{2}}{9}}{-\frac{7}{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

答 $\sin 2\alpha = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$, $\cos 2\alpha = -\frac{7}{9}$ $\tan 2\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{7}$



例 2 $3\alpha = 2\alpha + \alpha$ として、次の等式を証明せよ。
$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$$\begin{aligned}
\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) \\
&= \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha \\
&= (2\sin\alpha\cos\alpha)\cos\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha \\
&= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha \\
&= 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha \\
&= 3\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) - \sin^3\alpha \\
&= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha
\end{aligned}$$

問 2 $3\alpha = 2\alpha + \alpha$ として、次の等式を証明せよ。
$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

$$\begin{aligned}
\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) \\
&= \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha \\
&= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - (2\sin\alpha\cos\alpha)\sin\alpha \\
&= \cos^3\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha \\
&= \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha \\
&= \cos^3\alpha - 3(1 - \cos^2\alpha)\cos\alpha \\
&= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha
\end{aligned}$$