三角関数　P1600 関数の最大最小　　組　　番　名前

例 1　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \sin^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

問 1　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \cos^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

++*+*+*+*+*+*+*+*+ **【解答】** *+*+*+*+*+*+*+*+*+*+

例 1　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \sin^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

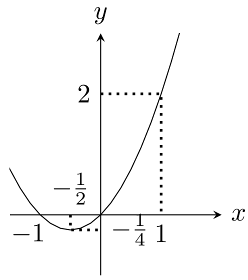
$x = \sin\theta$ と置き換えると、$-1 \leqq x \leqq 1$

$$\begin{aligned} y &= x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\ &= (x^2 + x + \tfrac{1}{4}) - \frac{1}{4} \\ &= (x + \tfrac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

頂点 $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$, 下に凸の 2 次関数

$-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲においては、

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \text{のとき、最小値} -\frac{1}{4} \\ x = 1 \text{ のとき、最大値 } 2 \end{cases}$$



$\sin\theta = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$

$\sin\theta = 1 \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}$

答　$\theta = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$ のとき、最小値 $-\frac{1}{4}$

　$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき、最大値 2

問 1　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \cos^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ だから、

$$y = -\sin^2\theta + \sin\theta + 1$$

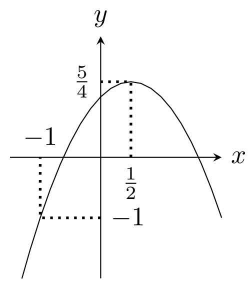
ここで、$x = \sin\theta$ とすると、$-1 \leqq x \leqq 1$

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + x + 1 \\ &= -(x^2 - x + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}) + 1 \\ &= -(x^2 - x + \tfrac{1}{4}) + \frac{1}{4} + 1 \\ &= -(x - \tfrac{1}{2})^2 + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

頂点は $(\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$、上に凸の 2 次関数

$-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲においては、

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{のとき、最大値} \frac{5}{4} \\ x = -1 \text{ のとき、最小値} - 1 \end{cases}$$



$\sin\theta = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

$\sin\theta = -1 \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{3}{2}\pi$

答　$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ のとき、最大値 $\frac{5}{4}$

　$\theta = \frac{3}{2}\pi$ のとき、最小値 -1