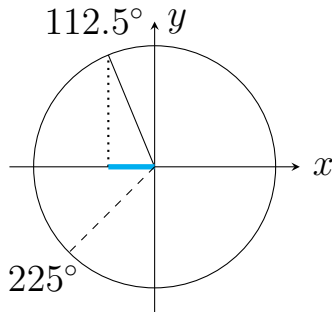
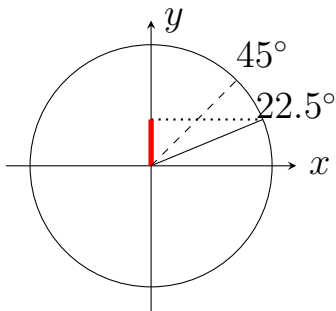


三角関数

2400. 半角の公式

$\sin 22.5^\circ$ 、 $\cos 112.5^\circ$ の値を求めよ。



今回の学習目標

半角の公式

- 倍角の公式から導く
- 角の大きさから $\pm$ を判断

倍角の公式

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

半角の公式



倍角の公式

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= 1 - 2\sin^2 \alpha\end{aligned}$$

半角の公式



倍角の公式

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= 1 - 2\sin^2 \alpha\end{aligned}$$

半角の公式

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$



倍角の公式

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= 2 \cos^2 \alpha - 1\end{aligned}$$

半角の公式

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$



倍角の公式

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= 2 \cos^2 \alpha - 1\end{aligned}$$

半角の公式

$$\begin{aligned}\sin^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1 - \cos \theta}{2} \\ \cos^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1 + \cos \theta}{2}\end{aligned}$$

例 1 $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$ が成り立つことを証明せよ。

例 1 $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$ が成り立つことを証明せよ。

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

例 1 $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$ が成り立つことを証明せよ。

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= 1 - 2\sin^2 \alpha \quad (\because \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha)\end{aligned}$$

例 1 $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$ が成り立つことを証明せよ。

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= 1 - 2\sin^2 \alpha \quad (\because \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha)$$

ここで、 $\alpha = \frac{\theta}{2}$ とする。



例 1 $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$ が成り立つことを証明せよ。

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= 1 - 2\sin^2 \alpha \quad (\because \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha)\end{aligned}$$

ここで、 $\alpha = \frac{\theta}{2}$ とする。

$$\cos \theta = 1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2}$$

例 1

$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$ が成り立つことを証明せよ。

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= 1 - 2\sin^2 \alpha \quad (\because \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha)$$

ここで、 $\alpha = \frac{\theta}{2}$ とする。

$$\cos \theta = 1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$2\sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos \theta$$



例 1

$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$ が成り立つことを証明せよ。

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= 1 - 2\sin^2 \alpha \quad (\because \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha)$$

ここで、 $\alpha = \frac{\theta}{2}$ とする。

$$\cos \theta = 1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$2\sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos \theta$$

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$



ビデオを止めて問題を解いてみよう

問 1 次の式が成り立つことを証明せよ。

$$(1) \quad \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$(2) \quad \tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

問 1

$$(1) \quad \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

問 1

$$(1) \quad \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$



問 1

$$(1) \quad \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= 2\cos^2 \alpha - 1 \quad (\because \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha)$$



問 1

$$(1) \quad \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= 2\cos^2 \alpha - 1 \quad (\because \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha)$$

ここで、 $\alpha = \frac{\theta}{2}$ とする。



問 1

$$(1) \quad \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= 2\cos^2 \alpha - 1 \quad (\because \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha)$$

ここで、 $\alpha = \frac{\theta}{2}$ とする。

$$\cos \theta = 2\cos^2 \frac{\theta}{2} - 1$$



問 1

$$(1) \quad \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= 2\cos^2 \alpha - 1 \quad (\because \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha)$$

ここで、 $\alpha = \frac{\theta}{2}$ とする。

$$\cos \theta = 2\cos^2 \frac{\theta}{2} - 1$$

$$2\cos^2 \frac{\theta}{2} = \cos \theta + 1$$



問 1

$$(1) \quad \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= 2\cos^2 \alpha - 1 \quad (\because \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha)$$

ここで、 $\alpha = \frac{\theta}{2}$ とする。

$$\cos \theta = 2\cos^2 \frac{\theta}{2} - 1$$

$$2\cos^2 \frac{\theta}{2} = \cos \theta + 1$$

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$



問 1

$$(2) \quad \tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

問 1

$$(2) \quad \tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

$$\tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}$$

問 1

$$(2) \quad \tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

$$\tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{\frac{1 - \cos \theta}{2}}{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$



問 1

$$(2) \quad \tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

$$\tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{\frac{1 - \cos \theta}{2}}{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \times \frac{2}{2}$$



問 1

$$(2) \quad \tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

$$\tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{\frac{1 - \cos \theta}{2}}{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \times \frac{2}{2}$$

$$= \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$



例 2

$\sin 22.5^\circ$ の値を求めよ。



例 2 $\sin 22.5^\circ$ の値を求めよ。

$$22.5^\circ = \frac{45^\circ}{2}$$

例 2 $\sin 22.5^\circ$ の値を求めよ。

$$22.5^\circ = \frac{45^\circ}{2}$$

半角公式： $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$



例 2 $\sin 22.5^\circ$ の値を求めよ。

$$22.5^\circ = \frac{45^\circ}{2}$$

半角公式： $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$

$$\sin^2 22.5^\circ = \sin^2 \frac{45^\circ}{2}$$



例 2

$\sin 22.5^\circ$ の値を求めよ。

$$22.5^\circ = \frac{45^\circ}{2}$$

$$\text{半角公式 : } \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

$$\sin^2 22.5^\circ = \sin^2 \frac{45^\circ}{2} = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2}$$



例 2

$\sin 22.5^\circ$ の値を求めよ。

$$22.5^\circ = \frac{45^\circ}{2}$$

$$\text{半角公式 : } \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

$$\begin{aligned}\sin^2 22.5^\circ &= \sin^2 \frac{45^\circ}{2} = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} \\ &= \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\end{aligned}$$



例 2

$\sin 22.5^\circ$ の値を求めよ。

$$22.5^\circ = \frac{45^\circ}{2}$$

$$\text{半角公式 : } \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

$$\sin^2 22.5^\circ = \sin^2 \frac{45^\circ}{2} = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2}$$

$$= \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \times \frac{2}{2}$$



例 2

$\sin 22.5^\circ$ の値を求めよ。

$$22.5^\circ = \frac{45^\circ}{2}$$

$$\text{半角公式: } \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 22.5^\circ &= \sin^2 \frac{45^\circ}{2} = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} \\ &= \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \times \frac{2}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$



例 2

$\sin 22.5^\circ$ の値を求めよ。

$$22.5^\circ = \frac{45^\circ}{2}$$

$$\text{半角公式: } \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

$$\sin^2 22.5^\circ = \sin^2 \frac{45^\circ}{2} = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2}$$

$$= \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \times \frac{2}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 22.5^\circ = \pm \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$



例 2

$\sin 22.5^\circ$ の値を求めよ。

$$22.5^\circ = \frac{45^\circ}{2}$$

$$\text{半角公式: } \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 22.5^\circ &= \sin^2 \frac{45^\circ}{2} = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} \\ &= \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \times \frac{2}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\sin 22.5^\circ = \pm \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

$$22.5^\circ \text{ は第 1 象限なので、} \sin 22.5^\circ = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$



例 2 $\sin 22.5^\circ$ の値を求めよ。

$$22.5^\circ = \frac{45^\circ}{2}$$

$$\text{半角公式: } \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 22.5^\circ &= \sin^2 \frac{45^\circ}{2} = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} \\ &= \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \times \frac{2}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\sin 22.5^\circ = \pm \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

$$22.5^\circ \text{ は第 1 象限なので、} \sin 22.5^\circ = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

$$\boxed{\text{答}} \quad \sin 22.5^\circ = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

ビデオを止めて問題を解いてみよう

問 2 $\cos 112.5^\circ$ の値を求めよ。

問 2

$\cos 112.5^\circ$ の値を求めよ。

問 2 $\cos 112.5^\circ$ の値を求めよ。

$$112.5^\circ = \frac{225^\circ}{2}$$



問 2 $\cos 112.5^\circ$ の値を求めよ。

$$112.5^\circ = \frac{225^\circ}{2}$$

半角公式： $\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$



問 2 $\cos 112.5^\circ$ の値を求めよ。

$$112.5^\circ = \frac{225^\circ}{2} \quad \text{半角公式: } \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$\cos^2 112.5^\circ = \cos^2 \frac{225^\circ}{2}$$



問 2 $\cos 112.5^\circ$ の値を求めよ。

$$112.5^\circ = \frac{225^\circ}{2} \quad \text{半角公式: } \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$\cos^2 112.5^\circ = \cos^2 \frac{225^\circ}{2} = \frac{1 + \cos 225^\circ}{2}$$



問 2 $\cos 112.5^\circ$ の値を求めよ。

$$112.5^\circ = \frac{225^\circ}{2} \quad \text{半角公式: } \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 112.5^\circ &= \cos^2 \frac{225^\circ}{2} = \frac{1 + \cos 225^\circ}{2} \\ &= \frac{1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2} \end{aligned}$$



問 2 $\cos 112.5^\circ$ の値を求めよ。

$$112.5^\circ = \frac{225^\circ}{2} \quad \text{半角公式: } \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 112.5^\circ &= \cos^2 \frac{225^\circ}{2} = \frac{1 + \cos 225^\circ}{2} \\ &= \frac{1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2} \times \frac{2}{2} \end{aligned}$$



問 2 $\cos 112.5^\circ$ の値を求めよ。

$$112.5^\circ = \frac{225^\circ}{2} \quad \text{半角公式: } \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 112.5^\circ &= \cos^2 \frac{225^\circ}{2} = \frac{1 + \cos 225^\circ}{2} \\ &= \frac{1 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})}{2} \times \frac{2}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

問 2 $\cos 112.5^\circ$ の値を求めよ。

$$112.5^\circ = \frac{225^\circ}{2} \quad \text{半角公式: } \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 112.5^\circ &= \cos^2 \frac{225^\circ}{2} = \frac{1 + \cos 225^\circ}{2} \\ &= \frac{1 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})}{2} \times \frac{2}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\cos 112.5^\circ = \pm \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

問 2 $\cos 112.5^\circ$ の値を求めよ。

$$112.5^\circ = \frac{225^\circ}{2} \quad \text{半角公式: } \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 112.5^\circ &= \cos^2 \frac{225^\circ}{2} = \frac{1 + \cos 225^\circ}{2} \\ &= \frac{1 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})}{2} \times \frac{2}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\cos 112.5^\circ = \pm \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

$$112.5^\circ \text{ は第 2 象限なので、} \cos 112.5^\circ = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$



問 2 $\cos 112.5^\circ$ の値を求めよ。

$$112.5^\circ = \frac{225^\circ}{2} \quad \text{半角公式: } \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 112.5^\circ &= \cos^2 \frac{225^\circ}{2} = \frac{1 + \cos 225^\circ}{2} \\ &= \frac{1 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})}{2} \times \frac{2}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\cos 112.5^\circ = \pm \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

$$112.5^\circ \text{ は第 2 象限なので、} \cos 112.5^\circ = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

$$\boxed{\text{答}} \quad \cos 112.5^\circ = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

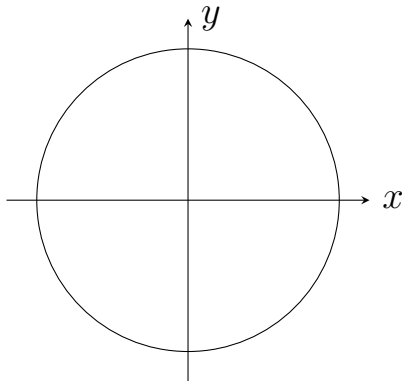
$$\sin 22.5^\circ = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

$$\cos 112.5^\circ = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$



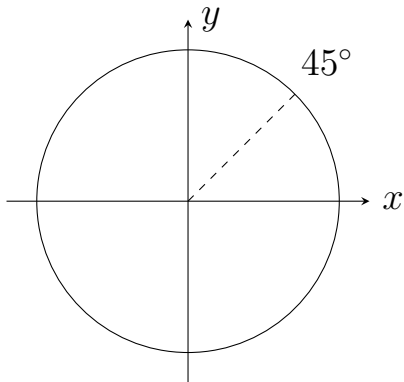
$$\sin 22.5^\circ = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

$$\cos 112.5^\circ = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$



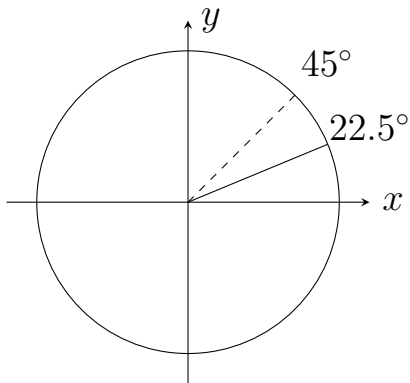
$$\sin 22.5^\circ = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

$$\cos 112.5^\circ = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$



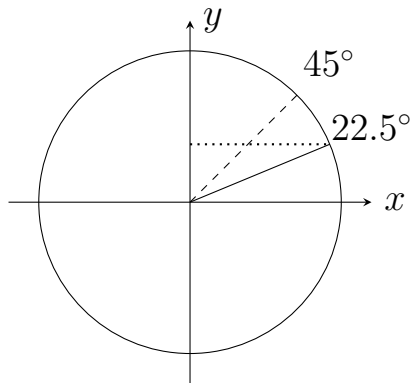
$$\sin 22.5^\circ = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

$$\cos 112.5^\circ = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$



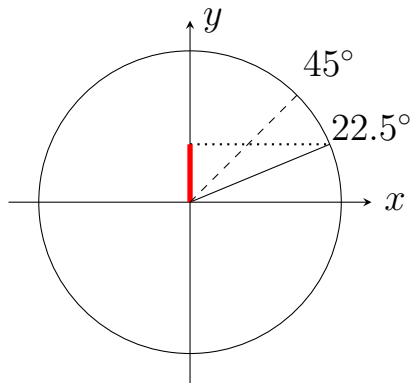
$$\sin 22.5^\circ = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

$$\cos 112.5^\circ = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$



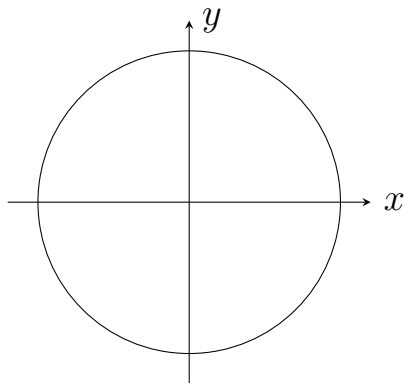
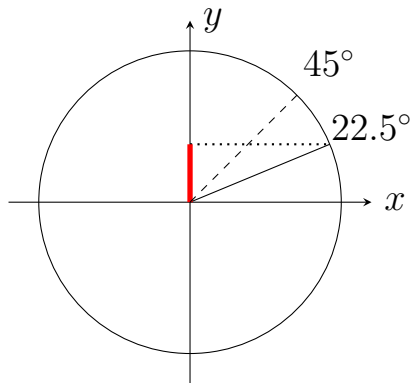
$$\sin 22.5^\circ = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

$$\cos 112.5^\circ = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$



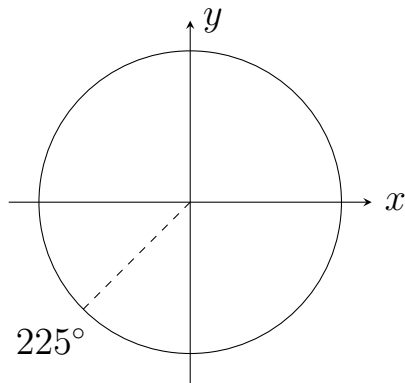
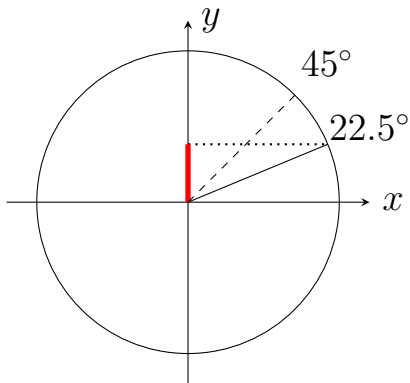
$$\sin 22.5^\circ = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

$$\cos 112.5^\circ = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$



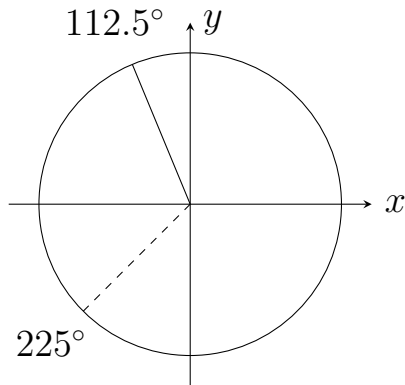
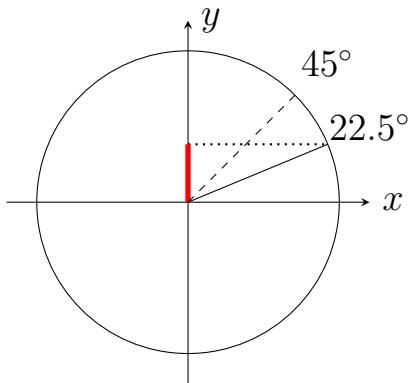
$$\sin 22.5^\circ = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

$$\cos 112.5^\circ = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$



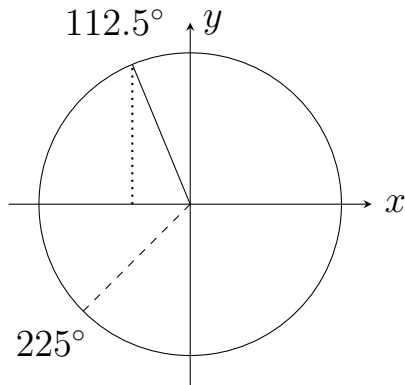
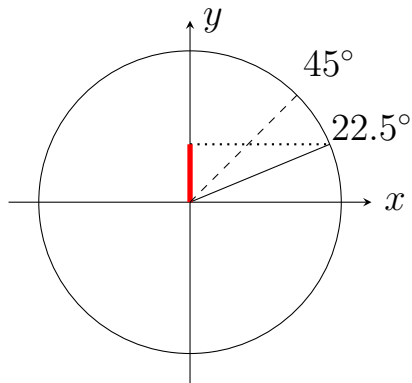
$$\sin 22.5^\circ = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

$$\cos 112.5^\circ = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$



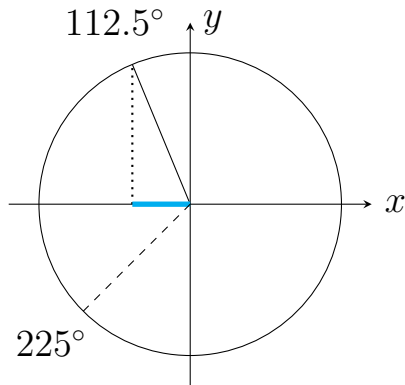
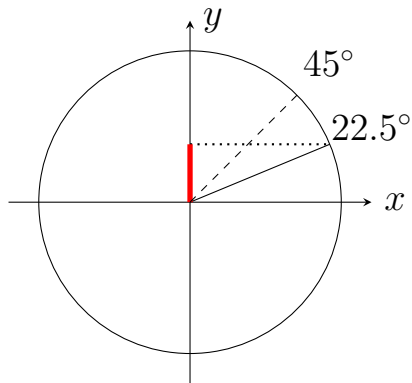
$$\sin 22.5^\circ = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

$$\cos 112.5^\circ = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$



$$\sin 22.5^\circ = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

$$\cos 112.5^\circ = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$



今回の学習目標

半角の公式

- 倍角の公式から導く
- 角の大きさから $\pm$ を判断