1600. 三角関数の最大値・最小値

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、

$$y = \cos^2\theta + \sin\theta$$

の最大値と最小値を求めよ。

math-support.jp

今回の学習目標

三角関数を含む最大値・最小値

- $\sin\theta, \cos\theta$ のいずれかを x に置き換える。

例 1　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \sin^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

math-support.jp

例 1　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \sin^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

$x = \sin\theta$ と置き換えると、$-1 \leqq x \leqq 1$

math-support.jp

例 1 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \sin^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

$x = \sin\theta$ と置き換えると、$-1 \leqq x \leqq 1$

$$y = x^2 + x$$

例 1 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \sin^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

$x = \sin\theta$ と置き換えると、$-1 \leqq x \leqq 1$

$$y = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

math-support.jp

例 1　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \sin^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

$x = \sin\theta$ と置き換えると、$-1 \leqq x \leqq 1$

$$y = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

$$= (x^2 + x + \frac{1}{4}) - \frac{1}{4}$$

math-support.jp

$\boxed{例 1}$ $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \sin^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

$x = \sin\theta$ と置き換えると、$-1 \leqq x \leqq 1$

$$
\begin{aligned}
y &= x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\
&= (x^2 + x + \frac{1}{4}) - \frac{1}{4} \\
&= (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

math-support.jp

例 1　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \sin^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

$x = \sin\theta$ と置き換えると、$-1 \leqq x \leqq 1$

$$y = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$
$$= (x^2 + x + \frac{1}{4}) - \frac{1}{4}$$
$$= (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$$

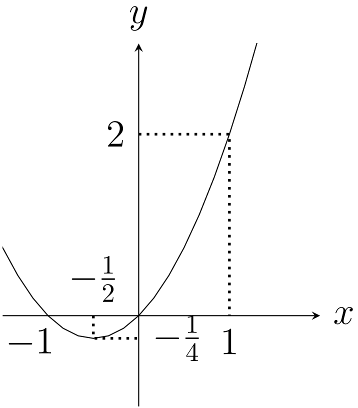
頂点 $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$, 下に凸の 2 次関数

例 1　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \sin^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

$x = \sin\theta$ と置き換えると、$-1 \leqq x \leqq 1$

$$\begin{aligned} y &= x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\ &= \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

頂点 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$, 下に凸の 2 次関数



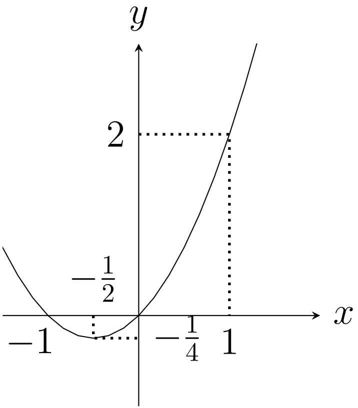
例 1　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \sin^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

$x = \sin\theta$ と置き換えると、$-1 \leqq x \leqq 1$

$$\begin{aligned} y &= x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\ &= \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

頂点 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$, 下に凸の 2 次関数

$-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲においては、



math-support.jp

例 1 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \sin^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

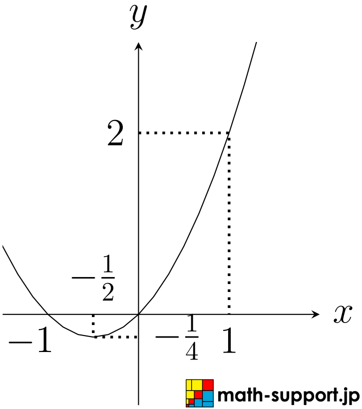
$x = \sin\theta$ と置き換えると、$-1 \leqq x \leqq 1$

$$\begin{aligned} y &= x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\ &= \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

頂点 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$, 下に凸の 2 次関数

$-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲においては、

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \text{ のとき、最小値 } -\frac{1}{4} \\ x = 1 \text{ のとき、最大値 } 2 \end{cases}$$



math-support.jp

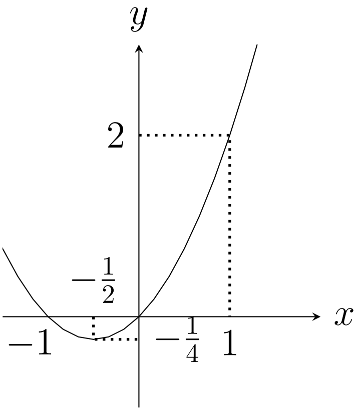
例 1　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \sin^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

$x = \sin\theta$ と置き換えると、$-1 \leqq x \leqq 1$

$-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲においては、

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \text{のとき、最小値} -\frac{1}{4} \\ x = 1 \text{ のとき、最大値 } 2 \end{cases}$$

$\sin\theta = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$



math-support.jp

例 1　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \sin^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

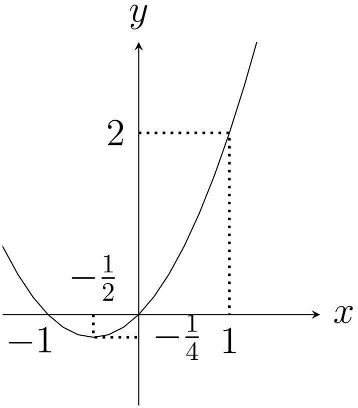
$x = \sin\theta$ と置き換えると、$-1 \leqq x \leqq 1$

$-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲においては、

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \text{のとき、最小値} -\frac{1}{4} \\ x = 1 \text{ のとき、最大値 } 2 \end{cases}$$

$\sin\theta = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

$\sin\theta = 1 \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}$



math-support.jp

例 1　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \sin^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

$x = \sin\theta$ と置き換えると、$-1 \leqq x \leqq 1$

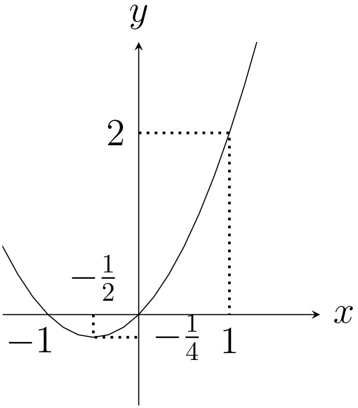
$-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲においては、

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \text{のとき、最小値} -\frac{1}{4} \\ x = 1 \text{ のとき、最大値 } 2 \end{cases}$$

$\sin\theta = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

$\sin\theta = 1 \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}$

答　$\theta = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$ のとき、最小値 $-\frac{1}{4}$



例 1　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \sin^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

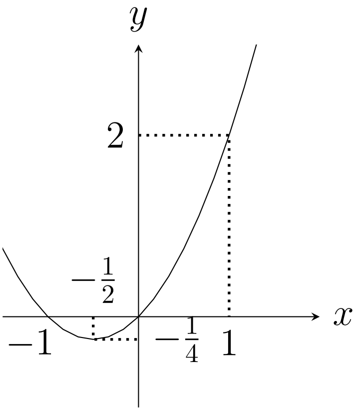
$x = \sin\theta$ と置き換えると、$-1 \leqq x \leqq 1$

$-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲においては、

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \text{のとき、最小値} -\frac{1}{4} \\ x = 1 \text{ のとき、最大値 } 2 \end{cases}$$

$\sin\theta = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

$\sin\theta = 1 \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}$



$\boxed{\text{答}}$　$\theta = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$ のとき、最小値 $-\frac{1}{4}$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき、最大値 2

math-support.jp

ビデオを止めて問題を解いてみよう

問 1　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \cos^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

math-support.jp

問 1 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \cos^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

math-support.jp

問 1 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \cos^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ だから

math-support.jp

問 1 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \cos^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ だから

$$y = -\sin^2\theta + \sin\theta + 1$$

math-support.jp

問 1 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \cos^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ だから

$$y = -\sin^2\theta + \sin\theta + 1$$

ここで、$x = \sin\theta$ とすると、$-1 \leqq x \leqq 1$

math-support.jp

問 1 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \cos^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

$$y = -\sin^2\theta + \sin\theta + 1$$

ここで、$x = \sin\theta$ とすると、$-1 \leqq x \leqq 1$

$$y = -x^2 + x + 1$$

math-support.jp

問 1　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \cos^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

$$y = -\sin^2\theta + \sin\theta + 1$$

ここで、$x = \sin\theta$ とすると、$-1 \leqq x \leqq 1$

$$y = -x^2 + x + 1$$

$$= -(x^2 - x \qquad\qquad) + 1$$

math-support.jp

問 1 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \cos^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

$$y = -\sin^2\theta + \sin\theta + 1$$

ここで、$x = \sin\theta$ とすると、$-1 \leqq x \leqq 1$

$$y = -x^2 + x + 1$$
$$= -(x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) + 1$$

math-support.jp

問 1 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \cos^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

$$y = -\sin^2\theta + \sin\theta + 1$$

ここで、$x = \sin\theta$ とすると、$-1 \leqq x \leqq 1$

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + x + 1 \\ &= -\left(x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 1 \\ &= -\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} + 1 \end{aligned}$$

math-support.jp

問 1 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \cos^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

$$y = -\sin^2\theta + \sin\theta + 1$$

ここで、$x = \sin\theta$ とすると、$-1 \leqq x \leqq 1$

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + x + 1 \\ &= -(x^2 - x + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}) + 1 \\ &= -(x^2 - x + \tfrac{1}{4}) + \tfrac{1}{4} + 1 \\ &= -(x - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{5}{4} \end{aligned}$$

math-support.jp

問 1 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \cos^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

$$y = -\sin^2\theta + \sin\theta + 1$$

ここで、$x = \sin\theta$ とすると、$-1 \leqq x \leqq 1$

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + x + 1 \\ &= -(x^2 - x + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}) + 1 \\ &= -(x^2 - x + \tfrac{1}{4}) + \tfrac{1}{4} + 1 \\ &= -(x - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{5}{4} \end{aligned}$$

頂点は $(\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$、上に凸の 2 次関数

math-support.jp

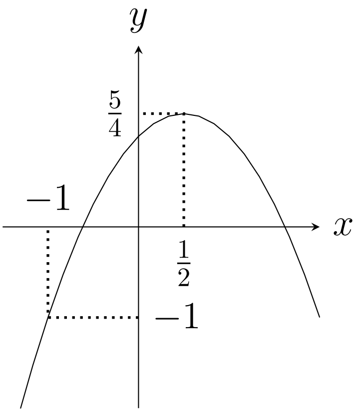
問 1 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \cos^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

$$y = -\sin^2\theta + \sin\theta + 1$$

ここで、$x = \sin\theta$ とすると、$-1 \leqq x \leqq 1$

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + x + 1 \\ &= -\left(x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 1 \\ &= -\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} + 1 \\ &= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

頂点は $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$、上に凸の 2 次関数



math-support.jp

問 1 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \cos^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

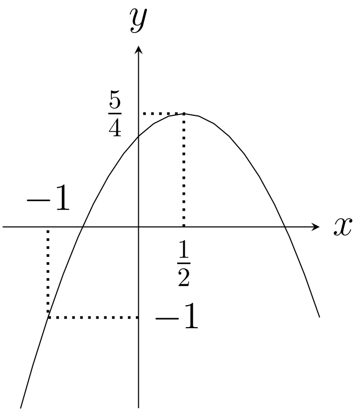
$$y = -\sin^2\theta + \sin\theta + 1$$

ここで、$x = \sin\theta$ とすると、$-1 \leqq x \leqq 1$

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + x + 1 \\ &= -\left(x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 1 \\ &= -\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} + 1 \\ &= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

頂点は $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$、上に凸の 2 次関数

$-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲においては、



問 1 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \cos^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

$$y = -\sin^2\theta + \sin\theta + 1$$

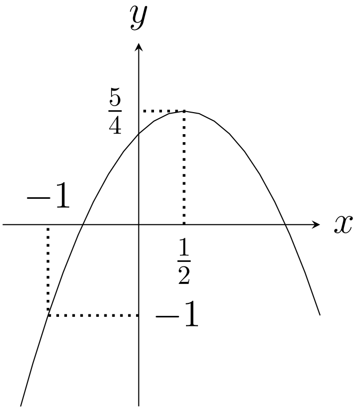
ここで、$x = \sin\theta$ とすると、$-1 \leqq x \leqq 1$

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + x + 1 \\ &= -(x^2 - x + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}) + 1 \\ &= -(x^2 - x + \tfrac{1}{4}) + \tfrac{1}{4} + 1 \\ &= -(x - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{5}{4} \end{aligned}$$

頂点は $(\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$、上に凸の 2 次関数

$-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲においては、

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{のとき、最大値} \frac{5}{4} \\ x = -1 \text{ のとき、最小値} -1 \end{cases}$$



問 1　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \cos^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

$$y = -\sin^2\theta + \sin\theta + 1$$

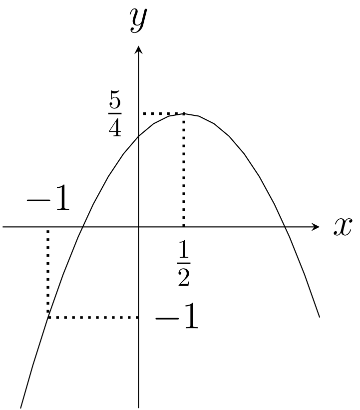
ここで、$x = \sin\theta$ とすると、$-1 \leqq x \leqq 1$

頂点は $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$、上に凸の 2 次関数

$-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲においては、

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{のとき、最大値} \frac{5}{4} \\ x = -1 \text{ のとき、最小値} -1 \end{cases}$$

$\sin\theta = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6}, \ \frac{5}{6}\pi$



問 1　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \cos^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

$$y = -\sin^2\theta + \sin\theta + 1$$

ここで、$x = \sin\theta$ とすると、$-1 \leqq x \leqq 1$

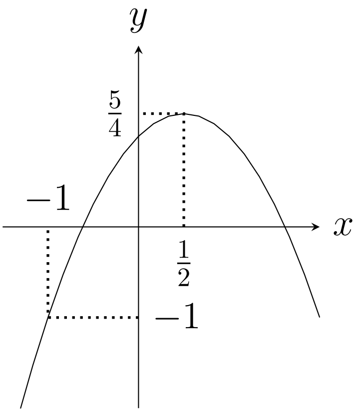
頂点は $(\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$、上に凸の 2 次関数

$-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲においては、

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{のとき、最大値} \frac{5}{4} \\ x = -1 \text{ のとき、最小値} -1 \end{cases}$$

$\sin\theta = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

$\sin\theta = -1 \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{3}{2}\pi$



math-support.jp

問 1 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \cos^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

$$y = -\sin^2\theta + \sin\theta + 1$$

ここで、$x = \sin\theta$ とすると、$-1 \leqq x \leqq 1$

頂点は $(\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$、上に凸の 2 次関数

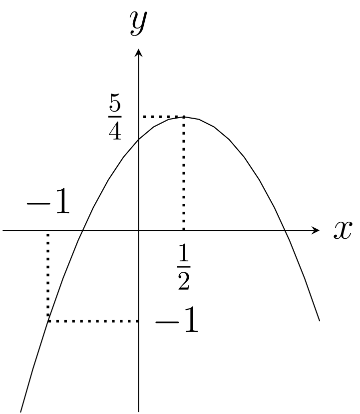
$-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲においては、

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{のとき、最大値} \frac{5}{4} \\ x = -1 \text{ のとき、最小値} -1 \end{cases}$$

$\sin\theta = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

$\sin\theta = -1 \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{3}{2}\pi$

$\boxed{\text{答}}$ $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ のとき、最大値 $\frac{5}{4}$



問 1 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = \cos^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値、そのときの θ の値を求めよ。

$$y = -\sin^2\theta + \sin\theta + 1$$

ここで、$x = \sin\theta$ とすると、$-1 \leqq x \leqq 1$

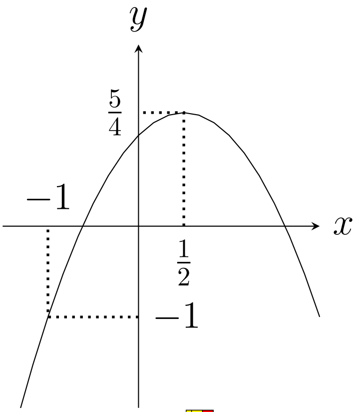
頂点は $(\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$、上に凸の 2 次関数

$-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲においては、

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{のとき、最大値} \frac{5}{4} \\ x = -1 \text{ のとき、最小値} -1 \end{cases}$$

$\sin\theta = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

$\sin\theta = -1 \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{3}{2}\pi$



答 $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ のとき、最大値 $\frac{5}{4}$

$\theta = \frac{3}{2}\pi$ のとき、最小値 -1

math-support.jp

今回の学習目標

三角関数を含む最大値・最小値

- $\sin\theta, \cos\theta$ のいずれかを x に置き換える。

math-support.jp