

図形と方程式

円の方程式：関連問題

3点を通る円の方程式

3点 $A(3, 6)$, $B(-1, 8)$, $C(-4, -1)$

を通る円の方程式を求めよ。

今回の学習目標

3点を通る円の方程式を求める。

- 三角形の外心を求めることができる。

円の方程式

中心 (a, b) 、半径 r の円の方程式

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

円の方程式

中心 (a, b) 、半径 r の円の方程式

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

上記を展開すると、

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$$

例 1

3 点 $A(3, 6)$, $B(-1, 8)$, $C(-4, -1)$ を通る円の方程式を
求めよ。

例 1 3 点 $A(3, 6)$, $B(-1, 8)$, $C(-4, -1)$ を通る円の方程式を
求めよ。

円の方程式を

$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ と
する。

例 1 3 点 $A(3, 6)$, $B(-1, 8)$, $C(-4, -1)$ を通る円の方程式を
求めよ。

円の方程式を

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0 \text{ と}$$

する。

$$\begin{cases} 9 + 36 + 3l + 6m + n = 0 \\ 1 + 64 - l + 8m + n = 0 \\ 16 + 1 - 4l - m + n = 0 \end{cases}$$

例 1 3 点 $A(3, 6)$, $B(-1, 8)$, $C(-4, -1)$ を通る円の方程式を
求めよ。

円の方程式を

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0 \text{ と}$$

する。

$$\begin{cases} 9 + 36 + 3l + 6m + n = 0 \\ 1 + 64 - l + 8m + n = 0 \\ 16 + 1 - 4l - m + n = 0 \end{cases}$$

これを整理すると、

$$\begin{cases} 3l + 6m + n = -45 & \cdots (1) \\ -l + 8m + n = -65 & \cdots (2) \\ -4l - m + n = -17 & \cdots (3) \end{cases}$$

例 1 3 点 $A(3, 6)$, $B(-1, 8)$, $C(-4, -1)$ を通る円の方程式を
求めよ。

円の方程式を

$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ と
する。

$$\begin{cases} 9 + 36 + 3l + 6m + n = 0 \\ 1 + 64 - l + 8m + n = 0 \\ 16 + 1 - 4l - m + n = 0 \end{cases}$$

これを整理すると、

$$\begin{cases} 3l + 6m + n = -45 & \cdots (1) \\ -l + 8m + n = -65 & \cdots (2) \\ -4l - m + n = -17 & \cdots (3) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \text{ より, } \\ 4l - 2m = 20 \rightarrow$$

例 1 3 点 $A(3, 6)$, $B(-1, 8)$, $C(-4, -1)$ を通る円の方程式を
求めよ。

円の方程式を

$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ と
する。

$$\begin{cases} 9 + 36 + 3l + 6m + n = 0 \\ 1 + 64 - l + 8m + n = 0 \\ 16 + 1 - 4l - m + n = 0 \end{cases}$$

これを整理すると、

$$\begin{cases} 3l + 6m + n = -45 & \cdots (1) \\ -l + 8m + n = -65 & \cdots (2) \\ -4l - m + n = -17 & \cdots (3) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \text{ より, } \\ 4l - 2m = 20 \rightarrow 2l - m = 10$$

例 1 3 点 $A(3, 6)$, $B(-1, 8)$, $C(-4, -1)$ を通る円の方程式を
求めよ。

円の方程式を

$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ と
する。

$$\begin{cases} 9 + 36 + 3l + 6m + n = 0 \\ 1 + 64 - l + 8m + n = 0 \\ 16 + 1 - 4l - m + n = 0 \end{cases}$$

これを整理すると、

$$\begin{cases} 3l + 6m + n = -45 & \cdots (1) \\ -l + 8m + n = -65 & \cdots (2) \\ -4l - m + n = -17 & \cdots (3) \end{cases}$$

(1) – (2) より、

$$4l - 2m = 20 \rightarrow 2l - m = 10$$

(2) – (3) より

$$3l + 9m = -48 \rightarrow$$

例 1 3 点 $A(3, 6)$, $B(-1, 8)$, $C(-4, -1)$ を通る円の方程式を
求めよ。

円の方程式を

$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ と
する。

$$\begin{cases} 9 + 36 + 3l + 6m + n = 0 \\ 1 + 64 - l + 8m + n = 0 \\ 16 + 1 - 4l - m + n = 0 \end{cases}$$

これを整理すると、

$$\begin{cases} 3l + 6m + n = -45 & \cdots (1) \\ -l + 8m + n = -65 & \cdots (2) \\ -4l - m + n = -17 & \cdots (3) \end{cases}$$

(1) – (2) より、

$$4l - 2m = 20 \rightarrow 2l - m = 10$$

(2) – (3) より

$$3l + 9m = -48 \rightarrow 2l + 6m = -32$$

例 1 3 点 $A(3, 6)$, $B(-1, 8)$, $C(-4, -1)$ を通る円の方程式を
求めよ。

円の方程式を

$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ と
する。

$$\begin{cases} 9 + 36 + 3l + 6m + n = 0 \\ 1 + 64 - l + 8m + n = 0 \\ 16 + 1 - 4l - m + n = 0 \end{cases}$$

これを整理すると、

$$\begin{cases} 3l + 6m + n = -45 & \cdots (1) \\ -l + 8m + n = -65 & \cdots (2) \\ -4l - m + n = -17 & \cdots (3) \end{cases}$$

(1) - (2) より、

$$4l - 2m = 20 \rightarrow 2l - m = 10$$

(2) - (3) より

$$3l + 9m = -48 \rightarrow 2l + 6m = -32$$

$$\begin{array}{rcl} 2l & -m & = 10 \\ -) 2l & +6m & = -32 \\ \hline \end{array}$$

例 1 3 点 $A(3, 6)$, $B(-1, 8)$, $C(-4, -1)$ を通る円の方程式を
求めよ。

円の方程式を

$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ と
する。

$$\begin{cases} 9 + 36 + 3l + 6m + n = 0 \\ 1 + 64 - l + 8m + n = 0 \\ 16 + 1 - 4l - m + n = 0 \end{cases}$$

これを整理すると、

$$\begin{cases} 3l + 6m + n = -45 & \cdots (1) \\ -l + 8m + n = -65 & \cdots (2) \\ -4l - m + n = -17 & \cdots (3) \end{cases}$$

(1) - (2) より、

$$4l - 2m = 20 \rightarrow 2l - m = 10$$

(2) - (3) より

$$3l + 9m = -48 \rightarrow 2l + 6m = -32$$

$$\begin{array}{rcl} 2l & -m & = 10 \\ -) 2l & +6m & = -32 \\ \hline -7m & = 42 \end{array}$$

例 1 3 点 $A(3, 6)$, $B(-1, 8)$, $C(-4, -1)$ を通る円の方程式を
求めよ。

円の方程式を

$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ と
する。

$$\begin{cases} 9 + 36 + 3l + 6m + n = 0 \\ 1 + 64 - l + 8m + n = 0 \\ 16 + 1 - 4l - m + n = 0 \end{cases}$$

これを整理すると、

$$\begin{cases} 3l + 6m + n = -45 & \cdots (1) \\ -l + 8m + n = -65 & \cdots (2) \\ -4l - m + n = -17 & \cdots (3) \end{cases}$$

(1) - (2) より、

$$4l - 2m = 20 \rightarrow 2l - m = 10$$

(2) - (3) より

$$3l + 9m = -48 \rightarrow 2l + 6m = -32$$

$$\begin{array}{r} 2l - m = 10 \\ -) 2l + 6m = -32 \\ \hline -7m = 42 \end{array}$$

$$m = -6, l = 2, n = -15$$

例 1 3 点 $A(3, 6)$, $B(-1, 8)$, $C(-4, -1)$ を通る円の方程式を
求めよ。

円の方程式を

$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ と
する。

$$\begin{cases} 9 + 36 + 3l + 6m + n = 0 \\ 1 + 64 - l + 8m + n = 0 \\ 16 + 1 - 4l - m + n = 0 \end{cases}$$

これを整理すると、

$$\begin{cases} 3l + 6m + n = -45 & \cdots (1) \\ -l + 8m + n = -65 & \cdots (2) \\ -4l - m + n = -17 & \cdots (3) \end{cases}$$

(1) - (2) より、

$$4l - 2m = 20 \rightarrow 2l - m = 10$$

(2) - (3) より

$$3l + 9m = -48 \rightarrow 2l + 6m = -32$$

$$\begin{array}{r} 2l - m = 10 \\ -) 2l + 6m = -32 \\ \hline -7m = 42 \end{array}$$

$$m = -6, l = 2, n = -15$$

答 $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$

ビデオを止めて問題を解いてみよう

問 1

3 点 $A(5, 3)$, $B(2, 6)$, $C(-3, 1)$ を通る
円の方程式を求めよ。

問 1

3 点 $A(5, 3)$, $B(2, 6)$, $C(-3, 1)$ を通る円の方程式を求めよ。

問 1 3 点 $A(5, 3)$, $B(2, 6)$, $C(-3, 1)$ を通る円の方程式を求めよ。

円の方程式を

$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ と
する。

問 1 3 点 $A(5, 3)$, $B(2, 6)$, $C(-3, 1)$ を通る円の方程式を求めよ。

円の方程式を

$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ と
する。

$$\begin{cases} 25 + 9 + 5l + 3m + n = 0 \\ 4 + 36 + 2l + 6m + n = 0 \\ 9 + 1 - 3l + m + n = 0 \end{cases}$$

問 1 3 点 $A(5, 3)$, $B(2, 6)$, $C(-3, 1)$ を通る円の方程式を求めよ。

円の方程式を

$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ と
する。

$$\begin{cases} 25 + 9 + 5l + 3m + n = 0 \\ 4 + 36 + 2l + 6m + n = 0 \\ 9 + 1 - 3l + m + n = 0 \end{cases}$$

これを整理すると、

$$\begin{cases} 5l + 3m + n = -34 & \cdots (1) \\ 2l + 6m + n = -40 & \cdots (2) \\ -3l + m + n = -10 & \cdots (3) \end{cases}$$

問 1 3 点 $A(5, 3)$, $B(2, 6)$, $C(-3, 1)$ を通る円の方程式を求めよ。

円の方程式を

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0 \text{ と}$$

する。

$$(1) - (2) \text{ より、} \\ 3l - 3m = 6 \rightarrow$$

$$\begin{cases} 25 + 9 + 5l + 3m + n = 0 \\ 4 + 36 + 2l + 6m + n = 0 \\ 9 + 1 - 3l + m + n = 0 \end{cases}$$

これを整理すると、

$$\begin{cases} 5l + 3m + n = -34 & \cdots (1) \\ 2l + 6m + n = -40 & \cdots (2) \\ -3l + m + n = -10 & \cdots (3) \end{cases}$$

問 1 3 点 $A(5, 3)$, $B(2, 6)$, $C(-3, 1)$ を通る円の方程式を求めよ。

円の方程式を

$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ と
する。

$$\begin{cases} 25 + 9 + 5l + 3m + n = 0 \\ 4 + 36 + 2l + 6m + n = 0 \\ 9 + 1 - 3l + m + n = 0 \end{cases}$$

これを整理すると、

$$\begin{cases} 5l + 3m + n = -34 & \cdots (1) \\ 2l + 6m + n = -40 & \cdots (2) \\ -3l + m + n = -10 & \cdots (3) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \text{ より, } \\ 3l - 3m = 6 \rightarrow l - m = 2$$

問 1 3 点 $A(5, 3)$, $B(2, 6)$, $C(-3, 1)$ を通る円の方程式を求めよ。

円の方程式を

$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ と
する。

$$\begin{cases} 25 + 9 + 5l + 3m + n = 0 \\ 4 + 36 + 2l + 6m + n = 0 \\ 9 + 1 - 3l + m + n = 0 \end{cases}$$

(1) - (2) より、
 $3l - 3m = 6 \rightarrow l - m = 2$

(2) - (3) より、
 $5l + 5m = -30 \rightarrow$

これを整理すると、

$$\begin{cases} 5l + 3m + n = -34 & \cdots (1) \\ 2l + 6m + n = -40 & \cdots (2) \\ -3l + m + n = -10 & \cdots (3) \end{cases}$$

問 1 3 点 $A(5, 3)$, $B(2, 6)$, $C(-3, 1)$ を通る円の方程式を求めよ。

円の方程式を

$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ とする。

$$\begin{cases} 25 + 9 + 5l + 3m + n = 0 \\ 4 + 36 + 2l + 6m + n = 0 \\ 9 + 1 - 3l + m + n = 0 \end{cases}$$

これを整理すると、

$$\begin{cases} 5l + 3m + n = -34 & \cdots (1) \\ 2l + 6m + n = -40 & \cdots (2) \\ -3l + m + n = -10 & \cdots (3) \end{cases}$$

(1) – (2) より、

$$3l - 3m = 6 \rightarrow l - m = 2$$

(2) – (3) より、

$$5l + 5m = -30 \rightarrow l + m = -6$$

問 1 3 点 $A(5, 3)$, $B(2, 6)$, $C(-3, 1)$ を通る円の方程式を求めよ。

円の方程式を

$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ とする。

$$\begin{cases} 25 + 9 + 5l + 3m + n = 0 \\ 4 + 36 + 2l + 6m + n = 0 \\ 9 + 1 - 3l + m + n = 0 \end{cases}$$

これを整理すると、

$$\begin{cases} 5l + 3m + n = -34 & \cdots (1) \\ 2l + 6m + n = -40 & \cdots (2) \\ -3l + m + n = -10 & \cdots (3) \end{cases}$$

(1) - (2) より、

$$3l - 3m = 6 \rightarrow l - m = 2$$

(2) - (3) より、

$$5l + 5m = -30 \rightarrow l + m = -6$$

$$\begin{array}{r} l - m = 2 \\ +) l + m = -6 \\ \hline \end{array}$$

問 1 3 点 $A(5, 3)$, $B(2, 6)$, $C(-3, 1)$ を通る円の方程式を求めよ。

円の方程式を

$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ とする。

$$\begin{cases} 25 + 9 + 5l + 3m + n = 0 \\ 4 + 36 + 2l + 6m + n = 0 \\ 9 + 1 - 3l + m + n = 0 \end{cases}$$

これを整理すると、

$$\begin{cases} 5l + 3m + n = -34 & \cdots (1) \\ 2l + 6m + n = -40 & \cdots (2) \\ -3l + m + n = -10 & \cdots (3) \end{cases}$$

(1) - (2) より、

$$3l - 3m = 6 \rightarrow l - m = 2$$

(2) - (3) より、

$$5l + 5m = -30 \rightarrow l + m = -6$$

$$\begin{array}{r} l - m = 2 \\ +) l + m = -6 \\ \hline 2l = -4 \end{array}$$

問 1 3 点 $A(5, 3)$, $B(2, 6)$, $C(-3, 1)$ を通る円の方程式を求めよ。

円の方程式を

$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ とする。

$$\begin{cases} 25 + 9 + 5l + 3m + n = 0 \\ 4 + 36 + 2l + 6m + n = 0 \\ 9 + 1 - 3l + m + n = 0 \end{cases}$$

これを整理すると、

$$\begin{cases} 5l + 3m + n = -34 & \cdots (1) \\ 2l + 6m + n = -40 & \cdots (2) \\ -3l + m + n = -10 & \cdots (3) \end{cases}$$

(1) – (2) より、

$$3l - 3m = 6 \rightarrow l - m = 2$$

(2) – (3) より、

$$5l + 5m = -30 \rightarrow l + m = -6$$

$$\begin{array}{rcl} l & -m &= 2 \\ +) & l & +m = -6 \\ \hline 2l & & = -4 \end{array}$$

$$l = -2, m = -4, n = -12$$

問 1 3 点 $A(5, 3)$, $B(2, 6)$, $C(-3, 1)$ を通る円の方程式を求めよ。

円の方程式を

$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ とする。

$$\begin{cases} 25 + 9 + 5l + 3m + n = 0 \\ 4 + 36 + 2l + 6m + n = 0 \\ 9 + 1 - 3l + m + n = 0 \end{cases}$$

これを整理すると、

$$\begin{cases} 5l + 3m + n = -34 & \cdots (1) \\ 2l + 6m + n = -40 & \cdots (2) \\ -3l + m + n = -10 & \cdots (3) \end{cases}$$

(1) – (2) より、

$$3l - 3m = 6 \rightarrow l - m = 2$$

(2) – (3) より、

$$5l + 5m = -30 \rightarrow l + m = -6$$

$$\begin{array}{r} l - m = 2 \\ +) l + m = -6 \\ \hline 2l = -4 \end{array}$$

$$l = -2, m = -4, n = -12$$

答 $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0$

例 2

3 点 $A(3, 6)$, $B(-1, 8)$, $C(-4, -1)$ について、
 $\triangle ABC$ の外心と外接円の半径を求めよ。

例 2

3 点 $A(3, 6)$, $B(-1, 8)$, $C(-4, -1)$ について、
 $\triangle ABC$ の外心と外接円の半径を求めよ。

3 点を通る円の方程式は、例 1 で求めた通り、

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$$

例 2

3 点 $A(3, 6)$, $B(-1, 8)$, $C(-4, -1)$ について、
 $\triangle ABC$ の外心と外接円の半径を求めよ。

3 点を通る円の方程式は、例 1 で求めた通り、

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 15 + 1 + 9$$

例 2

3 点 $A(3, 6)$, $B(-1, 8)$, $C(-4, -1)$ について、
 $\triangle ABC$ の外心と外接円の半径を求めよ。

3 点を通る円の方程式は、例 1 で求めた通り、

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 15 + 1 + 9$$

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

例 2

3 点 $A(3, 6)$, $B(-1, 8)$, $C(-4, -1)$ について、
 $\triangle ABC$ の外心と外接円の半径を求めよ。

3 点を通る円の方程式は、例 1 で求めた通り、

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 &= 0 \\x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 &= 15 + 1 + 9 \\(x + 1)^2 + (y - 3)^2 &= 25\end{aligned}$$

この円の中心は $(-1, 3)$ 、半径 5 である。

例 2

3 点 $A(3, 6)$, $B(-1, 8)$, $C(-4, -1)$ について、
 $\triangle ABC$ の外心と外接円の半径を求めよ。

3 点を通る円の方程式は、例 1 で求めた通り、

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 &= 0 \\x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 &= 15 + 1 + 9 \\(x + 1)^2 + (y - 3)^2 &= 25\end{aligned}$$

この円の中心は $(-1, 3)$ 、半径 5 である。

答 $\triangle ABC$ の外心は、 $(-1, 3)$ 、外接円の半径 5

ビデオを止めて問題を解いてみよう

問 2 3 点 $A(5, 3)$, $B(2, 6)$, $C(-3, 1)$ について、
 $\triangle ABC$ の外心と外接円の半径を求めよ。

問 2

3 点 $A(5, 3)$, $B(2, 6)$, $C(-3, 1)$ について、
 $\triangle ABC$ の外心と外接円の半径を求めよ。

問 2 3 点 $A(5, 3)$, $B(2, 6)$, $C(-3, 1)$ について、
 $\triangle ABC$ の外心と外接円の半径を求めよ。

3 点を通る円の方程式は、問 1 で求めた通り、

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0$$

問 2 3 点 $A(5, 3)$, $B(2, 6)$, $C(-3, 1)$ について、
 $\triangle ABC$ の外心と外接円の半径を求めよ。

3 点を通る円の方程式は、問 1 で求めた通り、

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 12 + 1 + 4$$

問 2 3 点 $A(5, 3)$, $B(2, 6)$, $C(-3, 1)$ について、
 $\triangle ABC$ の外心と外接円の半径を求めよ。

3 点を通る円の方程式は、問 1 で求めた通り、

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 2x - 4y - 12 &= 0 \\x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 &= 12 + 1 + 4 \\(x - 1)^2 + (y - 2)^2 &= 17\end{aligned}$$

問 2 3点 $A(5, 3)$, $B(2, 6)$, $C(-3, 1)$ について、
 $\triangle ABC$ の外心と外接円の半径を求めよ。

3点を通る円の方程式は、問1で求めた通り、

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 2x - 4y - 12 &= 0 \\x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 &= 12 + 1 + 4 \\(x - 1)^2 + (y - 2)^2 &= 17\end{aligned}$$

この円の中心は $(1, 2)$ 、半径 $\sqrt{17}$ である。

問 2

3点 $A(5, 3)$, $B(2, 6)$, $C(-3, 1)$ について、
 $\triangle ABC$ の外心と外接円の半径を求めよ。

3点を通る円の方程式は、問1で求めた通り、

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 12 + 1 + 4$$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 17$$

この円の中心は $(1, 2)$ 、半径 $\sqrt{17}$ である。

答 $\triangle ABC$ の外心は、 $(1, 2)$ 、外接円の半径 $\sqrt{17}$

今回の学習目標

3点を通る円の方程式を求める。

- 三角形の外心を求めることができる。