図形と方程式　K1500 円と直線の共有点の個数

組　　番　名前

例 1　円 $x^2+y^2=5$ と直線 $y=2x+t$ が異なる 2 点で交わるような定数 t の値の範囲を求めよ。

答

例 2　円 $x^2+y^2=17$、直線 $x-4y=t$ が接するときの t の値と接点の座標を求めよ。

答

問 1　円 $x^2+y^2=10$ と直線 $y=3x+t$ が異なる 2 点で交わるような定数 t の値の範囲を求めよ。

答

問 2　円 $x^2+y^2=5$、直線 $2x-y=t$ が接するときの t の値と接点の座標を求めよ。

答

++*+*+*+*+*+*+ 【解答】*+*+*+*+*+*+*+*+

例 1 円 $x^2+y^2=5$ と直線 $y=2x+t$ が異なる 2 点で交わるような定数 t の値の範囲を求めよ。

連立方程式

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ y=2x+t \end{cases}$$

において、y を消去して、x の 2 次方程式を作る。

$$x^2+(2x+t)^2=5$$
$$5x^2+4tx+(t^2-5)=0$$

この 2 次方程式が異なる 2 つの実数解を持てば、共有点を 2 つ持つことになる。この方程式の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} D/4 &= b'^2-ac \\ &= (2t)^2-5(t^2-5) \\ &= 4t^2-5t^2+25 \\ &= -t^2+25>0 \end{aligned}$$

$$t^2-25<0$$
$$(t-5)(t+5)<0$$

答 $-5<t<5$

問 1 円 $x^2+y^2=10$ と直線 $y=3x+t$ が異なる 2 点で交わるような定数 t の値の範囲を求めよ。

2 つの方程式を連立させて、y を消去すると、

$$x^2+(3x+t)^2=10$$
$$10x^2+6tx+(t^2-10)=0$$

この方程式が異なる 2 つの実数解を持つので、判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} D/4 &= (3t)^2-10(t^2-10) \\ &= -t^2+100>0 \end{aligned}$$

$$t^2-100<0$$
$$(t-10)(t+10)<0$$

答 $-10<t<10$

例 2 円 $x^2+y^2=17$、直線 $x-4y=t$ が接するときの t の値と接点の座標を求めよ。

直線の方程式を $x=4y+t$ と変形。

$$(4y+t)^2+y^2=17$$
$$17y^2+8ty+(t^2-17)=0 \quad \cdots(1)$$

この方程式が重解を持つので、判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} D/4 &= (4t)^2-17(t^2-17) \\ &= -t^2+17^2=0 \end{aligned}$$

$$t=\pm 17$$

これを (1) に代入すると、

$$17y^2+8\cdot(\pm 17)y+(17^2-17)=0$$
$$17y^2\pm 8\cdot(17)y+17(17-1)=0$$
$$17y^2\pm 8\cdot(17)y+17(16)=0$$
$$y^2\pm 8y+16=0$$
$$(y\pm 4)^2=0$$
$$y=\mp 4$$

これを直線の方程式に戻すと、

$$x=4(\mp 4)\pm 17=\pm 1$$

答 $t=17$ のとき $(1,-4)$、$t=-17$ のとき $(-1,4)$

問 2 円 $x^2+y^2=5$、直線 $2x-y=t$ が接するときの t の値と接点の座標を求めよ。

直線の方程式を $y=2x-t$ と変形。

$$x^2+(2x-t)^2=5$$
$$5x^2-4tx+(t^2-5)=0 \quad \cdots(1)$$

この方程式が重解を持つので、判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} D/4 &= (2t)^2-5(t^2-5) \\ &= -t^2+25=0 \end{aligned}$$

$$t^2=25$$
$$t=\pm 5$$

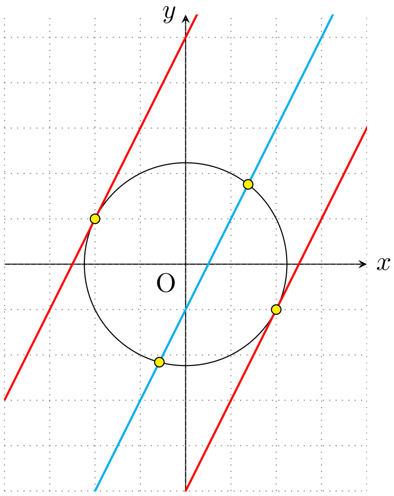
これを (1) に代入すると、

$$5x^2\mp 20x+20=0$$
$$x^2\mp 4x+4=0$$
$$(x\mp 2)^2=0$$
$$x=\pm 2$$

これを直線の方程式に戻すと、

$$y=\pm 4\mp 5=\mp 1$$

答 $t=5$ のとき $(2,-1)$、$t=-5$ のとき $(-2,1)$



y
x
O