

## 円の方程式

中心  $(a, b)$ 、半径  $r$  の円の方程式

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

上記を展開すると、

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$$

**例 1** 3 点  $A(3, 6)$ ,  $B(-1, 8)$ ,  $C(-4, -1)$  を通る円の方程式を求めよ。

円の方程式を  $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$  とする。

**問 1** 3 点  $A(5, 3)$ ,  $B(2, 6)$ ,  $C(-3, 1)$  を通る円の方程式を求めよ。

答

**例 2** 3 点  $A(3, 6)$ ,  $B(-1, 8)$ ,  $C(-4, -1)$  について、 $\triangle ABC$  の外心と外接円の半径を求めよ。

答

**問 2** 3 点  $A(5, 3)$ ,  $B(2, 6)$ ,  $C(-3, 1)$  について、 $\triangle ABC$  の外心と外接円の半径を求めよ。

答

答

\*+\*+\*+\*+\*+\*+ 【解答】 \*+\*+\*+\*+\*+\*+\*

**例 1** 3点  $A(3, 6)$ ,  $B(-1, 8)$ ,  $C(-4, -1)$  を通る円の方程式を求めよ。

円の方程式を  $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$  とする。

$$\begin{cases} 9 + 36 + 3l + 6m + n = 0 \\ 1 + 64 - l + 8m + n = 0 \\ 16 + 1 - 4l - m + n = 0 \end{cases}$$

これを整理すると、

$$\begin{cases} 3l + 6m + n = -45 & \dots (1) \\ -l + 8m + n = -65 & \dots (2) \\ -4l - m + n = -17 & \dots (3) \end{cases}$$

(1) – (2) より、

$$4l - 2m = 20$$

$$2l - m = 10$$

(2) – (3) より

$$3l + 9m = -48$$

$$l + 3m = -16$$

$$2l + 6m = -32$$

$$\begin{array}{rcl} 2l & -m & = 10 \\ -) & 2l & +6m = -32 \\ \hline & -7m & = 42 \end{array}$$

これにより、 $m = -6, l = 2, n = -15$

**答**  $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$

**問 1** 3 点  $A(5, 3)$ ,  $B(2, 6)$ ,  $C(-3, 1)$  を通る円の方程式を求めよ。

円の方程式を  $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$  とする。

$$\begin{cases} 25 + 9 + 5l + 3m + n = 0 \\ 4 + 36 + 2l + 6m + n = 0 \\ 9 + 1 - 3l + m + n = 0 \end{cases}$$

これを整理すると、

$$\begin{cases} 5l + 3m + n = -34 & \dots (1) \\ 2l + 6m + n = -40 & \dots (2) \\ -3l + m + n = -10 & \dots (3) \end{cases}$$

(1) – (2) より、

$$3l - 3m = 6$$

$$l - m = 2$$

(2) – (3) より、

$$5l + 5m = -30$$

$$l+m=-6$$

$$\begin{array}{rcl} l & -m & = 2 \\ +) & l & +m = -6 \\ \hline 2l & & = -4 \end{array}$$

これにより、 $l = -2$ ,  $m = -4$ ,  $n = -12$

**答**  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0$

**例 2** 3 点  $A(3, 6)$ ,  $B(-1, 8)$ ,  $C(-4, -1)$  について、 $\triangle ABC$  の外心と外接円の半径を求めよ。

3点を通る円の方程式は、例1で求めた通り、

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 15 + 1 + 9$$

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

この円の中心は  $(-1, 3)$ 、半径 5 である。

【答】  $\triangle ABC$  の外心は、 $(-1, 3)$ 、外接円の半径 5

**問 2** 3 点  $A(5, 3)$ ,  $B(2, 6)$ ,  $C(-3, 1)$  について、 $\triangle ABC$  の外心と外接円の半径を求めよ。

3点を通る円の方程式は、問1で求めた通り、

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 12 + 1 + 4$$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 17$$

この円の中心は  $(1, 2)$ 、半径  $\sqrt{17}$  である。

【答】  $\triangle ABC$  の外心は、 $(1, 2)$ 、外接円の半径  $\sqrt{17}$