直線 $x+ay+2=0$ は、a の値を変えると傾きが変化しましたが、必ず点 $(-2,0)$ を通る直線となってました。これはどうしてでしょうか？
この直線の式を文字 a で整理しなおすと、

$$(y)a+(x+2)=0$$

この式は、$y=0,\ x+2=0$ であるならば、左辺はゼロ。
だから、直線 $x+ay+2=0$ は、a の値に関係なく、点 $(-2,0)$ を通ることになる。

直線の定点通過

$(ax+by+c)k+(dx+ey+f)=0$ は直線を表し、
k の値に関わりなく、

$$ax+by+c=0,\quad dx+ey+f=0$$

を満たす点 (x,y) を通る。

まず、与式は、

$(ax+by+c)k+(dx+ey+f)=0$
$akx+bky+ck+dx+ey+f=0$
$(ak+d)x+(bk+e)y+(ck+f)=0$

となり、$Ax+By+C=0$ となるので直線である。
また、$ax+by+c=0,\quad dx+ey+f=0$ を満たせば、与式は $0k+0=0$ となるので、k の値にかかわらず、成り立つ。

例 1　直線 $(2k+1)x+ky-1=0$ は、実数 k の値にかかわらず、定点 A を通ることを示し、この点 A の座標を求めよ。

問 1　次の直線は、定数 k の値にかかわりなく定点を通る。その定点の座標を求めよ。

(1) $kx-y-2k+3=0$

(2) $(k+1)x-(2k+1)y-(2k+3)=0$

++*+*+*+*+*+*+*+ 【解答】*+*+*+*+*+*+*+*+*+

例 1　直線 $(2k+1)x+ky-1=0$ は、実数 k の値にかかわらず、定点 A を通ることを示し、この点 A の座標を求めよ。

解法 1　直線の方程式を k について整理しなおすと、

$$(2x+y)k+(x-1)=0$$

この式は、$2x+y=0,\ x-1=0$ のとき、k の値が何であっても成り立つ。
この方程式を解くと、$x=1,\ y=-2$ である。
したがって、
この直線は k の値にかかわらず、$A(1,-2)$ を通る。

解法 2　$(2k+1)x+ky-1=0$ に $k=0,\ -\frac{1}{2}$ を代入する。
$k=0 \quad \to \quad x-1=0$
$k=-\frac{1}{2} \quad \to \quad -\frac{1}{2}y-1=0$
よって、$x=1,\ y=-2$ である。
この値を元の直線の方程式の左辺に代入すると、
$(2k+1)(1)+k(-2)-1=0$
k の値にかかわらず必ずゼロとなる。
したがって、この直線は k の値にかかわらず必ず $A(1,-2)$ を通る。

問 1　次の直線は、定数 k の値にかかわりなく定点を通る。その定点の座標を求めよ。

(1) $kx-y-2k+3=0$

解法 1　直線の方程式を k について整理しなおすと、
$(x-2)k-(y-3)=0$
この式は、k の値に関係なく、$x-2=0,\ y-3=0$ のときに成り立つ。
したがって、k の値に関わりなく $(2,3)$ を通る。

解法 2　方程式に $k=0,1$ を代入すると、
$k=0 \quad \to \quad -y+3=0$
$k=1 \quad \to \quad x-y-2+3=0$
これを解いて、$(2,3)$

(2) $(k+1)x-(2k+1)y-(2k+3)=0$

解法 1　直線の方程式を k について整理しなおすと、
$kx+x-2ky-y-2k-3=0$
$(x-2y-2)k+(x-y-3)=0 \quad \cdots(1)$
この式 (1) は
$$\begin{cases} x-2y-2=0 & \cdots(2) \\ x-y-3=0 & \cdots(3) \end{cases}$$
を満たせば、k の値に関係なく成り立つ

$$\begin{array}{rr} & x-2y-2=0 \\ -) & x-\ \ y-3=0 \\ \hline & -\ \ y+1=0 \end{array}$$

よって、k に関係なく、$(4,1)$ を通る。

解法 2　方程式に $k=-1,-\frac{1}{2}$ を代入する。
$k=-1 \quad \to \quad y-1=0$
$k=-\frac{1}{2} \quad \to \quad \frac{1}{2}x-2=0$
これを解いて、$(4,1)$