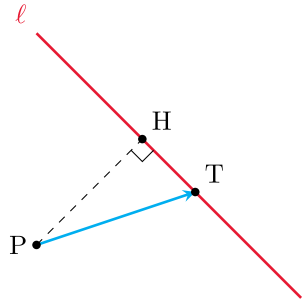
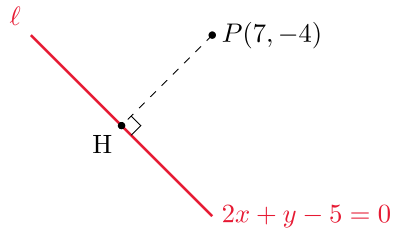
点 P と直線 ℓ との距離は、点 P から直線 ℓ へ引いた垂線の長さ PH です。



直線 ℓ 上の任意の点を T とすると、$\triangle PHT$ は $\angle H = R$ の直角三角形です。直角三角形では斜辺が最も長いので、$PH \leqq PT$ です。すなわち、直線上の点と点 P の最短の距離が**「点と直線の距離」**です。

例 1　直線 $\ell:\ 2x + y - 5 = 0$ と点 $P(7, -4)$ の距離を求めよ。



答

問 1　次の点 P と直線 ℓ の距離を求めよ。

(1) $P(-2, 8),\quad \ell:\ 3x - y + 4 = 0$

答

(2) $P(1, 7),\quad \ell:\ 4x - 3y - 8 = 0$

答

点と直線の距離

点 (x_0, y_0) と直線 $ax + by + c = 0$ の距離 d は

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(1) $P(-2, 8),\quad \ell:\ 3x - y + 4 = 0$

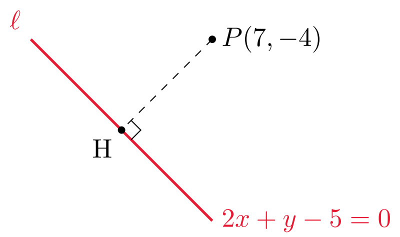
$$d = \frac{|3(-2) - (8) + 4|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}}$$

(2) $P(1, 7),\quad \ell:\ 4x - 3y - 8 = 0$

$$d = \frac{|4(1) - 3(7) - 8|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}$$

++*+*+*+*+*+*+ 【解答】*+*+*+*+*+*+*+*+

例 1　直線 ℓ : $2x+y-5=0$ と点 $P(7,-4)$ の距離を求めよ。



Step 1： 直線 ℓ の傾きは、-2 だから、PH の傾きは、$\dfrac{1}{2}$

Step 2： 直線 PH は、

$$y-(-4)=\frac{1}{2}(x-7)$$
$$x-2y-15=0 \quad \cdots(1)$$

Step 3： 直線 ℓ と (1) の交点を求める。

$$\begin{cases} 2x+y-5=0 & \cdots \ell \\ x-2y-15=0 & \cdots(1) \end{cases}$$

連立方程式を解くと、$H(5,-5)$

Step 4： PH の距離は、

$$\sqrt{(7-5)^2+(-4--5)^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

答　$\sqrt{5}$

問 1　次の点 P と直線 ℓ の距離を求めよ。

(1) $P(-2,8)$,　ℓ : $3x-y+4=0$

点 P から直線 ℓ に下ろした垂線の足を H とする。

Step 1： 直線 ℓ の傾きは 3、PH の傾きは $-\dfrac{1}{3}$

Step 2： 直線 PH は、

$$y-8=-\frac{1}{3}(x+2)$$
$$x+3y-22=0 \quad \cdots(1)$$

Step 3： 直線 ℓ と (1) の交点を求める。

$$\begin{cases} 3x-y+4=0 & \cdots \ell \\ x+3y-22=0 & \cdots(1) \end{cases}$$

連立方程式を解くと、$H(1,7)$

Step 4： PH の距離は、

$$\sqrt{(-2-1)^2+(8-7)^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$$

答　$\sqrt{10}$

(2) $P(1,7)$,　ℓ : $4x-3y-8=0$

点 P から直線 ℓ に下ろした垂線の足を H とする。

Step 1： 直線 ℓ の傾きは $\dfrac{4}{3}$、PH の傾きは $-\dfrac{3}{4}$

Step 2： 直線 PH は、

$$y-7=-\frac{3}{4}(x-1)$$
$$3x+4y-31=0 \quad \cdots(1)$$

Step 3： 直線 ℓ と (1) の交点を求める。

$$\begin{cases} 4x-3y-8=0 & \cdots \ell \\ 3x+4y-31=0 & \cdots(1) \end{cases}$$

連立方程式を解くと、$H(5,4)$

Step 4： PH の距離は、

$$\sqrt{(5-1)^2+(4-7)^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$$

答　5

点と直線の距離

点 (x_0,y_0) と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(1)　$P(-2,8)$,　ℓ : $3x-y+4=0$

$$d=\frac{|3(-2)-(8)+4|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|-10|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

(2)　$P(1,7)$,　ℓ : $4x-3y-8=0$

$$d=\frac{|4(1)-3(7)-8|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|-25|}{\sqrt{25}}=5$$