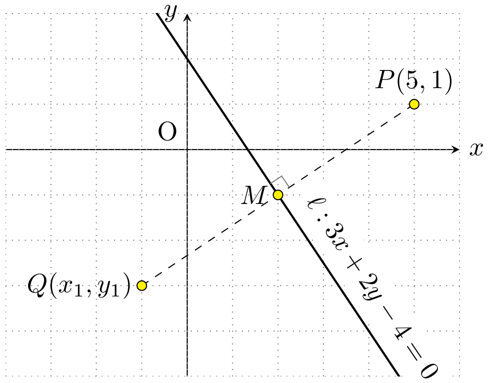
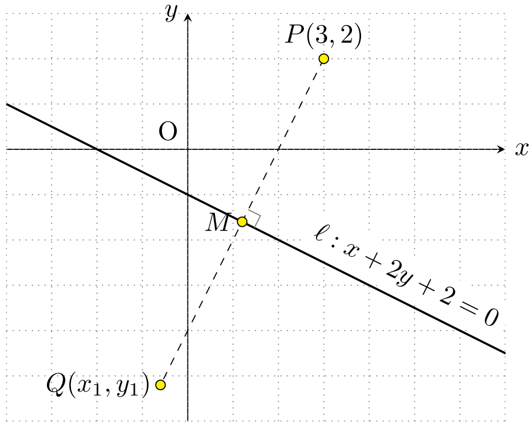
例 1　直線 $3x+2y-4=0$ を ℓ とする。直線 ℓ に関して、点 $P(5,2)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。

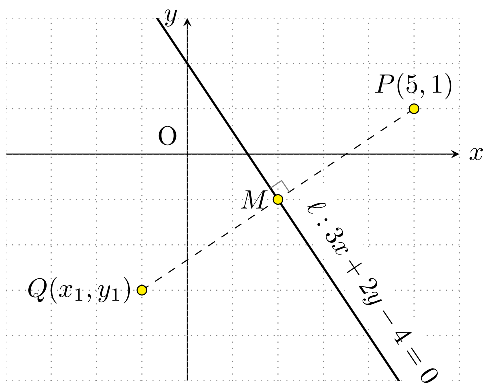


問 1　直線 $x+2y+2=0$ を ℓ とする。直線 ℓ に関して、点 $P(3,2)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。



++*+*+*+*+*+*+*+ 【解答】 *+*+*+*+*+*+*+*+*+

例 1 直線 $3x+2y-4=0$ を ℓ とする。直線 ℓ に関して、点 $P(5,2)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。



解法 1 直線 $\ell : 3x+2y-4=0$ の傾きは、$-\dfrac{3}{2}$

これと垂直、すなわち $\dfrac{2}{3}$ で点 $P(5,1)$ を通る直線は、

$$y-1=\frac{2}{3}(x-5)$$
$$y=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}\cdots(1)$$

ℓ と (1) の交点を求める。

$$3x+2\left(\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}\right)-4=0$$
$$9x+4x-14-12=0$$
$$x=2,\quad y=-1 \qquad \to M(2,-1)$$

$P(5,1)$、$Q(x_1,y_1)$ の中点が $M(2,-1)$ であるから、

$$\frac{5+x_1}{2}=2,\qquad \frac{1+y_1}{2}=-1$$
$$x_1=-1,\quad y_1=-3 \qquad \to Q(-1,-3)$$

解法 2 直線 $\ell : 3x+2y-4=0$ の傾きは、$-\dfrac{3}{2}$

$P(5,1)$ と $Q(x_1,y_1)$ の傾きが $\dfrac{2}{3}$ であるので、

$$\frac{y_1-1}{x_1-5}=\frac{2}{3}$$
$$3y_1-3=2x_1-10$$
$$2x_1-3y_1-7=0 \quad \cdots(1)$$

$P(5,1)$ と $Q(x_1,y_1)$ の中点は、$\left(\dfrac{5+x_1}{2},\dfrac{1+y_1}{2}\right)$

これが ℓ 上にあるので、

$$3\left(\frac{5+x_1}{2}\right)+2\left(\frac{1+y_1}{2}\right)-4=0$$
$$15+3x_1+2+2y_1-8=0$$
$$3x_1+2y_1+9=0 \quad \cdots(2)$$

(1) (2) より、

$$(1)\times 2:\ 4x_1-6y_1=14,$$
$$(2)\times 3:\ 9x_1+6y_1=-27$$

$$13x_1=-13$$
$$x_1=-1 \quad y_1=-3 \qquad \to Q(-1,-3)$$

解法 3 直線 $\ell : 3x+2y-4=0$ の傾きは、$-\dfrac{3}{2}$

$P(5,1)$ と $Q(x_1,y_1)$ の傾きが $\dfrac{2}{3}$ であるので、

$$\frac{y_1-1}{x_1-5}=\frac{2}{3}$$
$$3y_1-3=2x_1-10$$
$$2x_1-3y_1-7=0 \quad \cdots(1)$$

直線 ℓ と同じ傾きで、点 $P(5,1)$ を通る直線を求める。

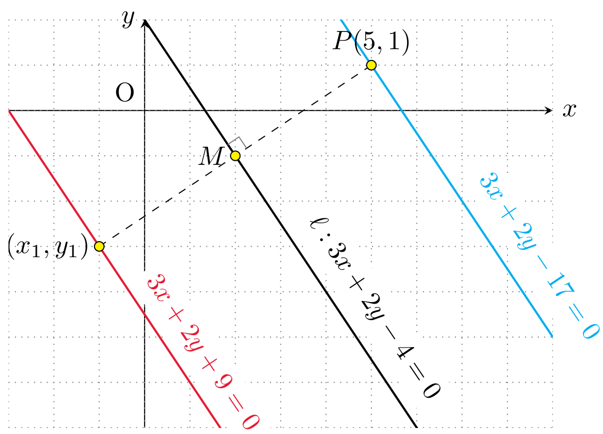
$3x+2y+c=0$ が $P(5,1)$ を通るので、

$$15+2+c=0 \qquad \to c=-17$$

すると、P、M、Q を通る直線は平行で、それぞれ等間隔であるはずだから、Q を通る直線の方程式が求められる。

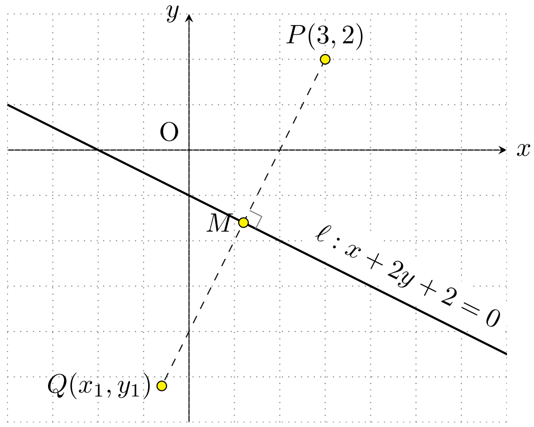
$$P \to \quad 3x+2y-17=0$$
$$M \to \quad 3x+2y-4=0$$
$$Q \to \quad 3x+2y+9=0 \quad \cdots(2)$$

(1) と (2) を連立するところからは、解法 2 と同じ。



問 1　直線 $x+2y+2=0$ を ℓ とする。直線 ℓ に関して、点 $P(3,2)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。

$\boxed{\text{答}}$　$Q\left(-\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{26}{5}\right)$



解法１　$\ell : x+2y+2=0$ の傾きは、$-\dfrac{1}{2}$

これと垂直、すなわち傾き 2 で点 P を通る直線は、

$$y-2=2(x-3)$$
$$y=2x-4 \quad \cdots(1)$$

ℓ と (1) の交点を求める。

$$x+2(2x-4)+2=0$$
$$x=\frac{6}{5},\quad y=-\frac{8}{5} \quad \to M\left(\frac{6}{5},-\frac{8}{5}\right)$$

$P(3,2)$ と $Q(x,y)$ の中点が M だから、

$$\frac{3+x}{2}=\frac{6}{5},\quad \frac{2+y}{2}=-\frac{8}{5}$$

$\boxed{\text{答}}$　$Q\left(-\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{26}{5}\right)$

解法２　$\ell : x+2y+2=0$ の傾きは、$-\dfrac{1}{2}$

$P(3,2)$ と $Q(x_1,y_1)$ の傾きが 2 であるので、

$$\frac{y_1-2}{x_1-3}=2$$
$$y_1-2=2(x_1-3)$$
$$2x_1-y_1-4=0 \quad \cdots(1)$$

$P(3,2)$ と $Q(x_1,y_1)$ の中点は、$\left(\dfrac{3+x_1}{2},\ \dfrac{2+y_1}{2}\right)$

これが ℓ 上にあるので、

$$\left(\frac{3+x_1}{2}\right)+2\left(\frac{2+y_1}{2}\right)+2=0$$
$$x_1+2y_2+11=0 \quad \cdots(2)$$

(1),(2) の連立方程式を解いて、　$\boxed{\text{答}}$　$Q\left(-\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{26}{5}\right)$

解法３　$\ell : x+2y+2=0$ の傾きは、$-\dfrac{1}{2}$

$P(3,2)$ と $Q(x_1,y_1)$ の傾きが 2 であるので、

$$\frac{y_1-2}{x_1-3}=2$$
$$y_1-2=2(x_1-3)$$
$$2x_1-y_1-4=0 \quad \cdots(1)$$

直線 ℓ と同じ傾きで、点 $P(3,2)$ を通る直線を求める。

$x+2y+c=0$ が $(3,2)$ を通るので、

$$3+4+c=0 \quad \to c=-7$$

すると、P、M、Q を通る直線は平行で、それぞれ等間隔であるはずだから、Q を通る直線の方程式が求められる。

$$P \to \quad x+2y-7=0$$
$$\ell \to \quad x+2y+2=0$$
$$Q \to \quad x+2y+11=0 \quad \cdots(2)$$

(1),(2) の連立方程式を解いて、　$\boxed{\text{答}}$　$Q\left(-\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{26}{5}\right)$