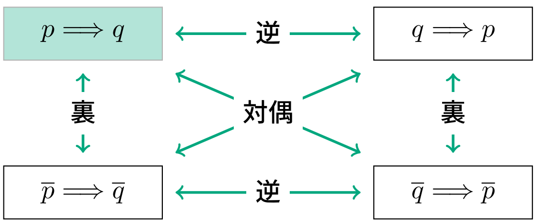
集合と命題　B1300 対偶を用いた証明

組　　　番　名前



命題と対偶の真偽

命題「$p \Longrightarrow q$」と
その対偶「$\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}$」の真偽は一致する。

したがって、命題「$p \Longrightarrow q$」を証明するときに、
その対偶を証明することで、証明が完了したことになる。

例 20　自然数 n について、
「n^2 が偶数ならば、n が偶数である」を証明せよ。

問 20　自然数 n について、
「n^2 が 3 の倍数でないなら、n は 3 の倍数でない」
を証明せよ。

例 21　自然数 n について、「n^2 が 3 の倍数ならば、n は 3 の倍数である」ことを証明せよ。

問 21　自然数 n について、
「n^2 を 5 で割った余りが 1 または 4 でないなら、
n は 5 の倍数である」ことを証明せよ。

例 22　x, y を実数とする。
「$xy < 1$ ならば、$x < 1$ または $y < 1$ である」
ことを証明せよ。

問 22　x, y を正の実数とする。
「$xy \geqq 4$ ならば、$x \geqq 2$ または $y \geqq 2$ である」
ことを証明せよ。

++*+*+*+*+*+*+ 【解答】*+*+*+*+*+*+*+*+

例 20　自然数 n について、
「n^2 が偶数ならば、n が偶数である」を証明せよ。

証明

対偶「n が奇数ならば、n^2 が奇数である」を証明する。
n が奇数ならば、自然数 k を用いて、

$$n = 2k - 1$$

と表すことができる。このとき、

$$\begin{array}{rcl} n^2 &=& (2k-1)^2 \\ &=& 4k^2 - 4k + 1 \\ &=& 2(2k^2 - 2k) + 1 \end{array}$$

となるが、$(2k^2 - 2k)$ は自然数であるので、n^2 は奇数である。対偶が真であるので、もとの命題も真である。

問 20　自然数 n について、
「n^2 が 3 の倍数でないなら、n は 3 の倍数でない」を証明せよ。

証明

対偶「n が 3 の倍数ならば、n^2 が 3 の倍数である」を証明する。
n が 3 の倍数ならば、自然数 k を用いて、

$$n = 3k$$

と表すことができる。このとき、

$$\begin{array}{rcl} n^2 &=& (3k)^2 \\ &=& 9k^2 \\ &=& 3(3k^2) \end{array}$$

したがって、n^2 も 3 の倍数となる。
対偶が真であるので、もとの命題も真である。

例 21　自然数 n について、「n^2 が 3 の倍数ならば、n は 3 の倍数である」ことを証明せよ。

解説

対偶「n が 3 の倍数でないなら、n^2 は 3 の倍数でない」

n は整数 k を用いて次の 3 つに分類できる。
① $n = 3k$　$\cdots$3 で割り切れる (3 の倍数)
② $n = 3k+1$　$\cdots$3 で割って 1 余る (3 の倍数でない)
③ $n = 3k+2$　$\cdots$3 で割って 2 余る (3 の倍数でない)

証明

対偶「n が 3 の倍数でないなら、n^2 は 3 の倍数でない」を証明する。

n は 3 の倍数ではないので、整数 k を用いて、② $n = 3k+1$ あるいは、③ $n = 3k+2$ と表すことができる。

② $n = 3k+1$ のとき、

$$\begin{array}{rcl} n^2 &=& (3k+1)^2 \\ &=& 9k^2 + 6k + 1 \\ &=& 3(3k^2 + 2k) + 1 \\ &=& 3\text{ の倍数} + 1 \end{array}$$

n^2 は 3 の倍数ではない。

③ $n = 3k+2$ のとき、

$$\begin{array}{rcl} n^2 &=& (3k+2)^2 \\ &=& 9k^2 + 12k + 4 \\ &=& 9k^2 + 12k + 3 + 1 \\ &=& 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 \\ &=& 3\text{ の倍数} + 1 \end{array}$$

n^2 は 3 の倍数ではない。

したがって、②の場合も③の場合も 3 の倍数ではない。
対偶が真であるので、もとの命題も真である。

問 21 自然数 n について、「n^2 を 5 で割った余りが 1 または 4 でないなら、n は 5 の倍数である」

証明

対偶「n が 5 の倍数でないなら、n^2 は 5 で割ったあまりが 1 か 4 である」

① $n = 5k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} n^2 &= (5k+1)^2 \\ &= 25k^2 + 10k + 1 \\ &= 5(5k^2 + 2k) + 1 \\ &= 5\text{ の倍数} + 1 \end{aligned}$$

n^2 を 5 で割れば、余りが 1

② $n = 5k + 2$ のとき、

$$\begin{aligned} n^2 &= (5k+2)^2 \\ &= 25k^2 + 20k + 4 \\ &= 5(5k^2 + 4k) + 4 \\ &= 5\text{ の倍数} + 4 \end{aligned}$$

n^2 を 5 で割れば、余りが 4

③ $n = 5k + 3$ のとき、

$$\begin{aligned} n^2 &= (5k+3)^2 \\ &= 25k^2 + 30k + 9 \\ &= 5(5k^2 + 6k + 1) + 4 \\ &= 5\text{ の倍数} + 4 \end{aligned}$$

n^2 を 5 で割れば、余りが 4

④ $n = 5k + 4$ のとき、

$$\begin{aligned} n^2 &= (5k+4)^2 \\ &= 25k^2 + 40k + 16 \\ &= 5(5k^2 + 8k + 3) + 1 \\ &= 5\text{ の倍数} + 1 \end{aligned}$$

n^2 を 5 で割れば、余りが 1

①④のときは、余りが 1、②③のときは、余りが 4 となる。
対偶が真であるので、もとの命題も真である。

例 22 x, y を実数とする。次の命題を証明せよ。
「$xy < 1$ ならば、$x < 1$ または $y < 1$ である」

証明

対偶「$x \geqq 1$ かつ $y \geqq 1$ ならば、$xy \geqq 1$」を証明する。

$x \geqq 1$ の両辺に正の数 y をかける。

$$xy \geqq y$$

$y \geqq 1$ であるので、

$$xy \geqq y \geqq 1$$

したがって、$xy \geqq 1$ が成り立つ。
対偶が真であるので、もとの命題も真である。

問 22 x, y を正の実数とする。次の命題を証明せよ。
「$xy \geqq 4$ ならば、$x \geqq 2$ または $y \geqq 2$ である」

証明

対偶「$0 < x < 2$ かつ $0 < y < 2$ ならば、$xy < 4$」を証明する。

$x < 2$ の両辺に正の数 y をかける。

$$xy < 2y$$

$y < 2$ の両辺を 2 倍すると $2y < 4$ であるから、

$$xy < 2y < 4$$

したがって、$xy < 4$ が成り立つ。
対偶が真であるので、もとの命題も真である。